東京理科大学集中講義

幾何学特論 3

井川 治 (京都工芸繊維大学)

2023 年 10 月 10 日–13 日

概 要

位相空間，多様体について簡単に復習する．ホモトピー，胞体分割などいくつかの準備の後に Morse 理論の基本定理, Reeb の球面定理を説明する．

Brief review of topological spaces and manifolds. After some preparation on homotopy, cell decomposition, etc., the fundamental theorem of Morse theory and Reeb's sphere theorem will be introduced.

[目的] 目的は，次の (1), (2) を理解することである．

(1) 球面，トーラス，射影空間の胞体分割

(2) Morse 理論の基本定理, Reeb の球面定理

The objective is to understand

(1) cell decompositions of sphere, torus and projective spaces,

(2) The fundamental theorem of Morse theory and Reeb's sphere theorem

[目標] 目標は，多様体上の具体的に与えられた関数が Morse 関数かどうかを判定し，Morse 関数ならば臨界点とその指数が計算できるようになることである．

The goal is to be able to determine whether if an explicitly given function on a manifold is a Morse function, and if so, to be able to compute its critical points and its indices.

目 次

本文中の「定理」,「系」,「命題」,「補題」はすべて数学的な主張を表す．これらの区別は次による．

「定理」$\cdots$ 重要な主張
「系」$\cdots$ 定理から直ちにしたがう主張
「命題」$\cdots$ 自然に成り立つと思われる主張
「補題」$\cdots$ 定理の証明に必要な補助的な主張

これらの区別は主観による．

[発展] や [参考] は初めて読む際には飛ばしても後の議論に使うことはない．

本文中の「問」は本文の理解を確かめるための問題，章末の「練習問題」は発展的な問題である．

集中講義の前に，馬場蔵人さん (東京理科大学) にこの講義ノートを読んでいただき，いくつかのミスプリの指摘をしていただきました．

記号表

記号	意味
$\coprod$	互いに素な和集合
$\mathbb{R}^m$	m 次元実 Euclid 空間
$\mathbb{C}^m$	複素 m 次元複素 Euclid 空間
$M_m(\mathbb{R})$	m 次実正方行列全体
$M_m(\mathbb{C})$	m 次複素正方行列全体
$\mathfrak{O}$	開集合系
$\mathfrak{A}$	閉集合系
I	閉区間 $[0,1]$
Σ_g	種数 g の向き付け可能な閉曲面
V^n	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \\|x\\| \leq 1\}$
E^n	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \\|x\\| < 1\}$
S^{n-1}	$n-1$ 次元（単位）球面
T^m	m 次元トーラス $S^1 \times \cdots \times S^1$
$\mathbb{R}P^n$	実射影空間
$\mathbb{C}P^n$	複素射影空間
$GL(m,\mathbb{R})$	m 次実一般線形群
$GL(m,\mathbb{C})$	m 次複素一般線形群
$O(m)$	m 次直交群
$SO(m)$	m 次特殊直交群
$U(m)$	m 次ユニタリー群
$SU(m)$	m 次特殊ユニタリー群
$Sp(m)$	m 次シンプレクティック群
$SL(m,\mathbb{R})$	m 次実特殊線形群
$SL(m,\mathbb{C})$	m 次複素特殊線形群
tr	正方行列のトレース
${}^tX$	行列 X の転置行列
$\mathfrak{o}(m)$	$\{X \in M_m(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = O\}$
$\mathfrak{u}(m)$	$\{X \in M_m(\mathbb{C}) \mid X + X^* = O\}$
$\mathfrak{sp}(m)$	$\{X \in M_m(\mathbb{H}) \mid X + X^* = O\}$
$\mathfrak{sl}(m,\mathbb{R})$	$\{X \in M_m(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = O\}$
$\mathfrak{sl}(m,\mathbb{C})$	$\{X \in M_m(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = O\}$
$\mathfrak{su}(m)$	$\mathfrak{u}(m) \cap \mathfrak{sl}(m,\mathbb{C})$

1　位相幾何学

1.1　位相空間

この節では，位相空間の定義を簡単に復習する．距離空間 X の場合には，$A \subset X$ が X の開集合であるとは，A の任意の点に対し，その点の十分近くの任意の点がまた A の点になる場合であった．また，二つの距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続であるとは，動点 $x \in X$ を限りなく a に近づけると $f(x)$ が限りなく $f(a)$ に近づく場合であり，X の各点で連続な写像を，単に連続と言った．

距離空間の開集合全体のもついくつかの性質を公理として抜き出して，元の距離を忘れたものが位相空間である．距離から誘導されない位相空間も存在する．二つの位相空間の間の写像の連続性も定義できる．位相的な概念（たとえば，Hausdorff 性）は連続写像により必ずしも保たれない点が位相空間の一つの特徴である．

位相空間，開集合，閉集合，近傍系；compact 集合，Hausdorff 空間，連続写像の概念を復習し，基本的な性質を述べる．

$X(\neq \emptyset)$ を集合とする．X の部分集合の集まり $\mathfrak{O}$ が次の 3 つの条件を満たすとき，$\mathfrak{O}$ は X における**開集合系**であるという．

(1) $\emptyset, X \in \mathfrak{O}$

(2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$

(3) $O_\lambda \in \mathfrak{O}\ (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$

開集合系の与えられた集合 X を**位相空間**という．X を位相空間とする．$\mathfrak{O}$ の元を X の**開集合**という．部分集合 $A \subset X$ に含まれる最大の開集合を A の**内部**といい，A° で表す．

位相空間 X について $U \subset X$ が**閉集合**であるとは，$X - U \in \mathfrak{O}$ となるときをいう．閉集合の全体 $\mathfrak{A}$ を**閉集合系**という．$\mathfrak{A}$ は次を満たす．

(1) $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$

(2) $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$

(3) $A_\lambda \in \mathfrak{A}\ (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$

位相空間は閉集合系の公理で与えることもできる．

例 1.1. X を集合とする．
(1) [**密着位相**] $\mathfrak{O}=\mathfrak{A}=\{\emptyset, X\}$
(2) [**離散位相**] X の部分集合すべての集まり 2^X を $\mathfrak{O}$ とする位相空間：$\mathfrak{O}=\mathfrak{A}=2^X$.
(3) [距離空間] (X,d) を距離空間とする．$x\in X, \epsilon>0$ に対し，X の部分集合 $U_\epsilon(x)$ を

$$U_\epsilon(x)=\{y\in X \mid d(x,y)<\epsilon\}$$

と定め，$U_\epsilon(x)$ を x の ϵ-**近傍**という．$O\subset X$ が開集合であるとは，任意の $x\in O$ に対し，$\epsilon>0$ が存在して，$U_\epsilon(x)\subset O$ となるときをいう.（直感的には $x\in O$ の近くの点はすべて O の点であるという意味である）開集合の全体は開集合系の公理を満たす．距離空間を位相空間と見るときには常にこの方法による．

部分集合 $A\subset X$ を含む最小の閉集合を A の**閉包**といい，$\bar{A}$ で表す．$x\in X$ を含む開集合を x の**開近傍**という．また，$W\subset X$ が $x\in X$ の**近傍**であるとは，$x\in U\subset W$ となる X の開集合 U が存在するときをいう．このとき，W° の最大性から，$U\subset W^\circ\subset W$ となっている．このことに注意して言い換えると，W が x の近傍であるとは，$x\in W^\circ$ となる場合である．x の開近傍は x の近傍である．x の近傍全体を x の**近傍系**といい，$\mathbb{V}(x)$ と表す．$\mathbb{V}(x)$ の定義より，$X\in\mathbb{V}(x)$ であり，

$$O(\subset X)\text{ が開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } x\in O \text{ に対し，} O\in\mathbb{V}(x) \tag{1.1}$$

$\mathbb{V}(x)$ は次を満たす：

(1) $\mathbb{V}(x)\neq\emptyset$

(2) $U\in\mathbb{V}(x)\Rightarrow x\in U$.

(3) $U_1,U_2\in\mathbb{V}(x)\Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathbb{V}(x)$.

(4) $U\in\mathbb{V}(x), U\subset V\Rightarrow V\in\mathbb{V}(x)$.

(5) 任意の $U\in\mathbb{V}(x)$ に対し，$W\in\mathbb{V}(x), W\subset U$ が存在して，任意の $y\in W$ に対し，$W\in\mathbb{V}(y)$.

条件 (5) は，任意の $U\in\mathbb{V}(x)$ に対し，$x\in W\subset U$ を満たす開集合 W が存在するという条件を開集合という言葉を使わずに述べたものである．
近傍系の公理を上の (1)$\sim$ (5) で与え，開集合系を定めることもできる：

命題 1.2. X を集合とする．任意の $x \in X$ に対し，(x に依存する)X の部分集合の集まり $\mathbb{V}(x)$ が定まり，上の (1)∼ (5) を満たしているとする．このとき，X の開集合系 $\mathfrak{O}$ が一意に定まり，$\mathfrak{O}$ に関する $x \in X$ の近傍系が $\mathbb{V}(x)$ になる．

証明. (1.1) より，条件を満たす開集合系 $\mathfrak{O}$ は

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X \mid \text{任意の } x \in O \text{ に対し，} O \in \mathbb{V}(x)\}$$

と定めざるを得ない．これは，$\mathfrak{O}$ の一意性を示している．次に，上で定めた $\mathfrak{O}$ が実際に条件を満たす開集合系になることを示す．そのために条件 (1), (3), (4) を用いて，$\mathfrak{O}$ が開集合系になることをいい，得られた $\mathfrak{O}$ が条件を満たすことを (2), (4), (5) を用いていう．

まず，$\mathfrak{O}$ が開集合系になることをいう．$\mathfrak{O}$ の定義から，$\emptyset \in \mathfrak{O}$．(1), (4) から $X \in \mathfrak{O}$．(3) から $O_1, O_2 \in \mathfrak{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$．$O_\lambda \in \mathfrak{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ とする．任意の $x \in \bigcup O_\lambda$ に対し，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して，$x \in O_\mu$．$\mathfrak{O}$ の定義より，$O_\mu \in \mathbb{V}(x)$．$O_\mu \subset \bigcup O_\lambda$ と (4) より，$\bigcup O_\lambda \in \mathbb{V}(x)$．ゆえに，$\bigcup O_\lambda \in \mathfrak{O}$．よって，$\mathfrak{O}$ は開集合系の公理を満たす.

最後に，開集合系 $\mathfrak{O}$ の定める $x \in X$ の近傍系 $\mathbb{W}(x)$ が $\mathbb{V}(x)$ に一致することをいう．$\mathbb{W}(x)$ と $\mathfrak{O}$ の定義より，

$$\begin{aligned}
&U \in \mathbb{W}(x) \\
&\Leftrightarrow \exists V \in \mathfrak{O}, x \in V \subset U \qquad (\mathbb{W}(x) \text{ の定義}) \\
&\Leftrightarrow \text{任意の } y \in V \text{ に対し，} V \in \mathbb{V}(y) \text{ となる } V \text{ が存在して，} x \in V \subset U
\end{aligned}$$

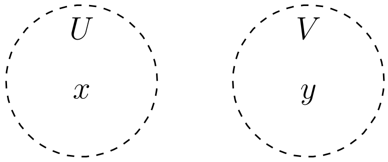
このとき，上の y として x をとれば，$V \in \mathbb{V}(x)$ であり，$x \in V \subset U$．条件 (4) より，$U \in \mathbb{V}(x)$．ゆえに，$\mathbb{W}(x) \subset \mathbb{V}(x)$．逆包含を示すために，(5) を $\mathfrak{O}$ を用いて言い換えれば，

$$(5) \Leftrightarrow \text{任意の } U \in \mathbb{V}(x) \text{ に対し，} W \in \mathfrak{O} \text{ が存在して，} W \in \mathbb{V}(x), W \subset U$$

上のとき，(2) より $x \in W$．よって，$\mathbb{W}(x)$ の定義により，$\mathbb{V}(x) \subset \mathbb{W}(x)$．ゆえに，$\mathbb{W}(x) = \mathbb{V}(x)$ となり主張が示された． □

位相空間 X の部分集合 A は次のようにして自然に位相空間になる．$U \subset A$ が A の開集合であるとは，X の開集合 O が存在して，$U = A \cap O$ となる場合をいう．このようにして定めた A の位相を**相対位相**と言う．

位相空間 X が **Hausdorff** であるとは，任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に対して，x, y それぞれの開近傍 U, V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在するときをいう．



距離空間 (例 1.1, (3)) は Hausdorff 空間になる．特に，m 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$ は Hausdorff 空間である．Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff 空間である．位相空間 X が Hausdorff 空間でないための必要十分条件は，ある $x, y \in X$ $(x \neq y)$ が存在して，x, y のそれぞれの任意の開近傍 U, V に対し，$U \cap V \neq \emptyset$ となることである．

問題 1.1. Hausdorff 位相空間 X の一点部分集合 $\{x\}$ は閉集合であることを示せ．

問題 1.2. X, Y を位相空間，$X \cap Y = \emptyset$ とする．次を示せ．

(1) $X \cup Y$ に位相が次で定まる：$X \cup Y$ の部分集合 O が開集合であるとは，X の開集合 U と Y の開集合 V が存在して，$O = U \cup V$ と表されるときをいう．このようにして，$X \cup Y$ に位相が定まることを確かめよ．この位相空間 $X \cup Y$ を X と Y の**位相和**という．

(2) X の開集合 U は位相和 $X \cup Y$ の開集合でもある．Y の開集合 V は位相和 $X \cup Y$ の開集合でもある．

(3) X と Y はそれぞれ $X \cup Y$ の開かつ閉集合である．

(4) X, Y が Hausdorff 位相空間ならば，位相和 $X \cup Y$ も Hausdorff 位相空間である．

位相空間 X の部分空間 A が**稠密**であるとは，$\bar{A} = X$ となるときをいう．

問題 1.3. X を位相空間，$A \subset X$ とする．次を示せ．

(1) $x \in X$ に対し，$x \in \bar{A}$ となるための必要十分条件は，x の任意の近傍 U に対し，$U \cap A \neq \emptyset$.

(2) A が稠密になるための必要十分条件は，任意の開集合 U に対し，$U \cap A \neq \emptyset$ となることである．

例 1.3. 任意の実数 x に対し，x にいくらでも近い有理数が存在するので，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の稠密な部分集合である．

問題 1.4. $X = \mathbb{R}^n$ とする．$r > 0$ に対し，$U_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \epsilon\}$ とおくと，$\overline{U_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$ となることを示せ．

X, Y を二つの位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が**連続**であるとは，Y の任意の開集合 V に対し，$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ が X の開集合になるときをいう．

問題 1.5. 次を示せ．$f : X \to Y$ を位相空間 $X.Y$ の間の写像とする．このとき，f が連続になるための条件は，Y の任意の閉集合 A に対し，$f^{-1}(A)$ が X の閉集合になることである．

問題 1.6. 次を示せ．$f : X \to Y$ を位相空間 X, Y の間の連続写像とする．このとき，任意の $x \in X$ と $f(x)$ の任意の近傍 V に対し，x の近傍 U が存在して，$f(U) \subset V$ となる．

問題 1.7. X を位相空間，Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とする．このとき，次を示せ．

(1) $U \subset Y$ が Y の開集合であるとは，$f^{-1}(U)$ が X の開集合であることと定義すると，Y は位相空間になる．

(2) (1) のようにして Y を位相空間と見るとき，f は連続写像である．

(3) (1) のようにして Y を位相空間と見るとき，$y \in Y - f(X)$ に対し，一点集合 $\{y\}$ は Y の開かつ閉集合である．

問題 1.8. 次を示せ．X, Y を位相空間,$f : X \to Y$ を連続写像とする．$A \subset X$ とする．

(1) $f : A \to f(X)$ は連続である．

(2) $f : A \to f(A)$ は連続である．

問題 1.9. $f : X \to Y$ を位相空間 X, Y の間の連続写像とする．$A \subset X$ とする．次を示せ．

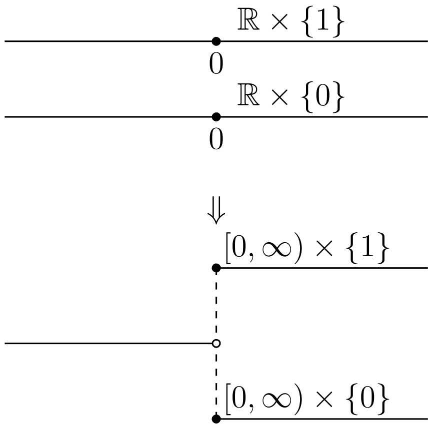
(1) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

(2) $\bar{A}$ が compact で，Y が Hausdorff ならば，$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

Hausdorff 空間の連続写像による像は Hausdorff 空間とは限らない．印象的な例を与えよう．

例 1.4. 2 点以上含む集合 X に離散位相を入れたものを X_0，密着位相を入れたものを X_1 とする．X_0 は Hausdorff であり，X_1 は Hausdorff でない．恒等写像 $X_0 \to X_1$ は連続である．

例 1.5. $\mathbb{R}\times\{0\}$ と $\mathbb{R}\times\{1\}$ の位相和 $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ に $x<0$ のとき $(x,0)$ と $(x,1)$ を同一視する同値関係 $\sim$ を入れる．$X := \mathbb{R}\times\{0,1\}/\sim$ に商位相を入れる．自然な射影 $\mathbb{R}\times\{0,1\} \to X$ は連続で，$\mathbb{R}\times\{0,1\}$ は Hausdorff であるが，X は Hausdorff ではない．



問題 1.10. $a\in\mathbb{R}$ に対し，$O_a := (a,\infty) = \{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$ とおく．
$\mathfrak{O} = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{O_a \mid a\in\mathbb{R}\}$ とおく．次を示せ．

(1) $\mathfrak{O}$ は開集合系の公理を満たす．

(2) $(\mathbb{R},\mathfrak{O})$ は Hausdorff ではない．

集合論における有限集合の概念は位相空間論では次で述べる compact の概念に相当すると考えられる．このことは後述の例 1.17 から示唆される．よって有限集合で成り立つ事実を compact 集合に拡張できるかどうかを考察することは大切である（命題 1.9 を参照）．

定義 1.6. 位相空間 X が **compact** であるとは，$\{O_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ が X の開被覆ならば，有限個の $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\Lambda$ が存在して，$\{O_{\lambda_i} \mid i=1,\cdots,m\}$ が X の被覆になるときをいう．

$A\subset X$ が compact であるとは，相対位相に関して A が compact になるときをいう．

例 1.7. 離散位相空間 X が compact になるための条件は X が有限集合になることである．

問題 1.11. 次を示せ．A を位相空間 A の部分集合とする．A が compact になるための必要十分条件は，

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \qquad (O_\lambda \text{ は } X \text{ の開集合})$$

となったとすると，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ が存在して，$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$ となることである．

問題 1.12. 2 つの compact 位相空間 X, Y の位相和 $X \cup Y$ は compact であることを示せ．

問題 1.13. 次を示せ．X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を全射連続写像とする．このとき，X が compact ならば，Y も compact である．

問題 1.14. compact 位相空間 X の閉集合 A は compact であることを示せ．

$f : X \to Y$ を二つの位相空間 X, Y の間の写像とする．

$f : X \to Y$ が**位相同型写像**であるとは，f が全単射連続写像で，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も連続になるときをいう．二つの位相空間 X, Y の間に位相同型写像が存在するとき，X と Y は**位相同型**であるという．

$f : X \to Y$ が**開写像**であるとは，X の任意の開集合 U に対し，$f(U)$ が Y の開集合となるときをいう．

$f : X \to Y$ が**閉写像**であるとは，X の任意の閉集合 A に対し，$f(A)$ が Y の閉集合となるときをいう．

例 1.8. $c \in \mathbb{R}$ に対し，定数関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto c$ は連続かつ閉写像であるが，$\{c\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではないので，f は開写像ではない．

問題 1.15. X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続な全単射とする．このとき，次の (1) $\sim$ (3) は同値であることを示せ．

(1) f は同相写像である．

(2) f は開写像である．

(3) f は閉写像である．

X, Y を位相空間とすると，直積 $X \times Y$ には直積位相が入る．

集合 $A(\neq \emptyset), B(\neq \emptyset)$ に対し，A, B が共に有限集合になることと $A \times B$ が有限集合になることとは同値である．命題 1.9 で見るように,「有限集合」を「compact」に置き換えても上のことは成り立つ．

問題 1.16. X, Y を位相空間とする．

(1) 全射 $p_X : X \times Y \to X; (x, y) \mapsto x$ と $p_Y : X \times Y \to Y; (x, y) \mapsto y$ は連続かつ開写像である．

(2) $X \times Y$ が compact ならば，X, Y はともに compact である．

問 1.16, (2) は実は必要十分である：

命題 1.9. X, Y を位相空間とする．$X \times Y$ が compact になるための必要十分条件は X, Y がともに compact になることである．

証明. 問題 1.16, (2) の結果より，$(\Rightarrow)$ が従う．

$(\Leftarrow)$ を示す．

まず，X, Y のそれぞれの開集合 U_λ, V_λ が存在して，$\{U_\lambda \times V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $X \times Y$ の開被覆になったとする．$x \in X$ を任意にとり，固定する．$X \times Y$ の部分空間 $\{x\} \times Y$ は Y と位相同型なので compact である．よって，有限個の $\lambda_1 = \lambda_1(x), \cdots, \lambda_n = \lambda_{n(x)}(x)$ が存在して，

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i})$$

$x \notin U_{\lambda_i}$ のとき，$(\{x\} \times Y) \cap (U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i}) = \emptyset$ だから，各 i について，$x \in U_{\lambda_i}$ と仮定して一般性を失わない．$U_x := \bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ は x の開近傍で，

$$U_x \times Y = U_x \times \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (U_x \times V_{\lambda_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i}) \tag{1.2}$$

$\{U_x \mid x \in X\}$ は X の開被覆で，X は compact なので，X の有限開被覆 $\{U_{x_j} \mid j = 1, \cdots, m\}$ がとれる．(1.2) より，

$$X \times Y = (\bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}) \times Y = \bigcup_{j=1}^{m} (U_{x_j} \times Y) = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i})$$

よって，有限開被覆がとれた．

次に，$\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $X \times Y$ の開被覆になったとする．各 O_λ は $U_{\lambda,\mu} \times V_{\lambda,\mu}$ という形の μ に関する和集合になる．$\{U_{\lambda,\mu} \times V_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu\}$ は $X \times Y$ の開被覆だから，上に述べたことから有限開被覆 $\{U_{\lambda_i,\mu_j} \times V_{\lambda_i,\mu_j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ がとれる．ゆえに $\bigcup_{j=1}^{m} U_{\lambda_i,\mu_j} \times V_{\lambda_i,\mu_j} \mid i = 1, \cdots, n\}$ は有限開被覆になる．よって，$\{O_{\lambda_i}\}$ は $X \times Y$ の有限被覆になる．よって，$X \times Y$ は compact である． □

次の定理は便利である．

定理 1.10. X を compact 位相空間，Y を Hausdorff 位相空間とする．このとき，連続な全単射 $f : X \to Y$ は位相同型写像である．

証明. f が閉写像であることを言えばよい (問題 1.15)．X は compact だから，$A \subset X$ を X の閉集合とすると，A は compact である．f は連続だから $f(A)$ は compact である (問題 1.13)．Y は Hausdorff だから，$f(A)$ は Y の閉集合である (補題 1.13)．よって，Y は閉写像になり，f は同相写像になる． □

問題 1.8 の結果と上の命題から直ちに次が得られる．

命題 1.11. X を compact 位相空間，Y を Hausdorff 位相空間とする．連続な単射 $f : X \to Y$ に対し，$f : X \to f(X)$ は同相写像である．

X が compact でないときには，Y が Hausdorff 空間であっても連続な全単射 $f : X \to Y$ は位相同型写像とは限らない (問題 1.17 を参照)．このことを踏まえて次の定義をする．

定義 1.12. $f : X \to Y$ を位相空間 X, Y の間の単射連続写像とし，$f(X)$ に相対位相を入れる．連続な全単射 $f : X \to f(X)$ が位相同型写像になるとき，$f : X \to Y$ を**埋め込み**という．

問題 1.17. 写像 $f : [0, 2\pi) \to S^1; \theta \mapsto e^{i\theta}$ は連続な全単射であるが，逆写像は連続ではないことを示せ．

補題 1.13. Hausdorff 位相空間 X の compact 部分集合 A は X の閉集合である．

証明. 主張を示すためには $X - A$ が開集合であることを示せばよい．任意の $x \in X - A$ をとり，固定する．任意の $y \in A$ に対し，$x \neq y$ だから，x, y のそれぞれの開近傍 U_y, V_y を $U_y \cap V_y = \emptyset$ ととれる (X は Hausdorff)．$\{V_y \mid y \in A\}$ は A の開被覆で，A は compact だから，有限開被覆 $\{V_{y_i} \mid i = 1, \cdots, m\}$ が選べる．このとき，

$$A \subset V := \bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i}, \qquad U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$$

だから，$U := \bigcap U_{y_i}$ とおくと，

$$A \cap U = \emptyset, \quad x \in U \subset X - A$$

ゆえに，$X - A$ は開集合である． □

上の補題の証明中のU, Vの性質をまとめておこう．

系 1.14. AをHausdorff位相空間Xのcompact部分集合とする．任意の$x \in X - A$に対し，xのXにおける近傍UとAを含むXの開集合Vで$U \cap V = \emptyset$となるものが存在する．

問題 1.18. XをHausdorff位相空間，A, BをXのcompact部分集合で，$A \cap B = \emptyset$となるものとする．このとき，A, Bをそれぞれ含むXの開集合O_1, O_2で$O_1 \cap O_2 = \emptyset$となるものが存在することを示せ．

位相空間Gが同時に群であり，群演算$G \times G \to G; (a, b) \mapsto ab$と$G \to G; a \mapsto a^{-1}$が連続になるとき，$G$を**位相群**という．

問題 1.19. 位相空間Xに位相群Gが左から連続に作用しているとする．このとき，連続な全射$\pi : X \to G \backslash X$は開写像であることを示せ．

すでに述べたように，Hausdorff位相空間の連続写像による像はHausdorff空間とは限らない．そのため，与えられた位相空間がHausdorffであることを示すのは，難しい場合もある．次の命題は有用である．

命題 1.15. compact群GがHausdorff空間Xに連続に作用するとき，軌道空間$G \backslash X$はHausdorff空間になる．

証明. $\pi : X \to G \backslash X$で自然な射影を表し，$x, y \in X$を$\pi(x) \neq \pi(y)$ととる．軌道$Gx, Gy$はcompactだから，$X$の開集合$O_1, O_2$を

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset, \qquad Gx \subset O_1, \qquad Gy \subset O_2$$

ととれる（問題 1.18）．GのXへの作用は連続だから，任意の$g \in G$に対し，xのXにおける開近傍U_gとgのGにおける開近傍V_gが存在して，$U_g V_g \subset O_1$(問題 1.6)．$\{V_g \mid g \in G\}$はGの開被覆で，Gはcompactだから，Gの有限開被覆$\{V_{g_i} \mid 1 \leq j \leq m\}$がとれる．このとき，$U_1 = \bigcap_{j=1}^m U_{g_j}$は$x$の$X$における開近傍であり，

$$\begin{aligned} Gx \subset GU_1 &= \bigcup_{j=1}^m V_{g_j} \bigcap_{k=1}^m U_{g_k} \subset \bigcup_{j=1}^m V_{g_j} U_{g_j} \qquad \left(\bigcap_{k=1}^m U_{g_k} \subset U_{g_j}\right) \\ &\subset O_1 \end{aligned}$$

同様に，yの近傍U_2を$Gy \subset GU_2 \subset O_2$ととれる．$\pi : X \to G \backslash X$は開写像 (問題 1.19) だから，$\pi(U_1), \pi(U_2)$はそれぞれ$\pi(x), \pi(y)$の$G \backslash X$における開近傍であり，$GU_1 \cap GU_2 \subset O_1 \cap O_2 = \emptyset$より，$\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$．ゆえに，$G \backslash X$はHausdorff空間である． □

定理 1.16. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が compact になるための必要十分条件は，X が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合になることである．

証明. まず，有界ではない部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ は compact にならないことを示す．

A は有界ではないから，任意の自然数 m に対し，$\|x_m\| > m$ となる自然数 $x_m \in A$ が存在する．$U_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < m\}$ とおくと，$\{U_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆だから，A の開被覆でもある．$\{U_m\}$ の有限部分集合 $U_{i_1}, \cdots, U_{i_r}$ の和集合は $m := \max\{i_1, \cdots, i_r\}$ とおくと，U_m に一致する．$x_m \notin U_m$ だから，$\{U_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ から A の有限開被覆が選べない．よって，A は compact ではない．

上の主張の対偶をとると,「X が compact ならば，X は有界」であることが示された．補題 1.13 より「X が compact ならば，X は閉集合」である．

逆に，X を有界閉集合であると仮定し，X が compact であることを示す．X はある閉区間の直積に含まれる．問題 1.14 の結果より，X は閉区間の直積の形であるとしてよい：

$$X = I_0 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

さらに，命題 1.9 より，$n = 1$ で $X = I_0 = [a_1, b_1]$ としてよい．仮に I_0 が compact でないと仮定して矛盾を導く．$\mathbb{R}$ の開集合 U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が存在して，$I_0 \subset \bigcup U_\lambda$ となったとする．$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ または $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ のうち少なくともどちらか一方は有限個の $\{U_\lambda\}$ で被覆されない．これを I_1 と書くと，I_1 は I_0 の部分集合で，I_1 の長さ $\frac{b_1-a_1}{2}$ は I_0 の長さ $b_1 - a_1$ の $1/2$ である．I_1 に対し，同じ操作を行うと，次の条件を満たす有界閉区間の列がとれる：

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots, \tag{1.3}$$

$$I_m \text{ の長さは } I_{m-1} \text{ の長さの } 1/2, \tag{1.4}$$

$$\text{各 } I_m \text{ は有限個の } \{U_\lambda\} \text{ で被覆されない} \tag{1.5}$$

(1.3), (1.4) より，1 点 c が存在して，$\bigcap I_m = \{c\}$．$c \in I_0 \subset \bigcup U_\lambda$ より，λ が存在して，$c \in U_\lambda$．U_λ は $\mathbb{R}$ の開集合だから，$\epsilon > 0$ が存在して，$c \in U(c, \epsilon) \subset U_\lambda$．(1.3), (1.4) より，十分大きい m に対し，$I_m \subset U(c, \epsilon) \subset U_\lambda$．これは，(1.5) に矛盾する． □

例 1.17. $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$ や $V^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$ は compact である．

例 1.18. $O(m), SO(m)$ は $\mathbb{R}^{m^2}$ の compact 部分集合である．$U(m), SU(m)$ は $\mathbb{R}^{2m^2}$ の compact 部分集合である．

定理 1.19. compact 位相空間 X 上で定義された実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は最大値・最小値をとる．

証明．$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の compact 部分集合である（問題 1.13，問題 1.8）．定理 1.16 より，$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合だから下限 $\inf f \in \mathbb{R}$ と上限 $\sup f \in \mathbb{R}$ が存在する．再び，定理 1.16 より $f(x)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合だから，$\max f = \sup f, \min f = \inf f$ が成り立つ． $\square$

位相空間 X が**弧状連結**であるとは，任意の二点 $x, y \in X$ に対して，連続写像 $c : I = [0,1] \to X$ で $c(0) = x, c(1) = y$ となるものが存在するときをいう．弧状連結位相空間 X の連続写像 f による像 $f(X)$ は弧状連結になる．

例 1.20. $n \geq 1$ のとき，$\mathbb{R}^n$ は弧状連結である．また，$n \geq 1$ のとき，S^n は弧状連結である．

問題 1.20. X を弧状連結位相空間，Y を位相空間，$f : X \to Y$ を全射連続写像とすると，Y も弧状連結位相空間となることを示せ．

問題 1.21. 弧状連結位相空間 X の任意の二点 $x, y \in X$ について，それらの基本群 $\pi_1(X, x)$ と $\pi_1(X, y)$ は群として同型になることを示せ．

問題 1.22. 次を示せ．compact 弧状連結位相空間 X 上で定義された連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の像 $f(X)$ はある有界閉区間 $[m, M]$ に一致する：$f(X) = [m, M]$.

定義 1.21. 位相空間 X が σ **compact** であるとは，X が高々可算個の compact 部分集合 K_i で覆える場合をいう．

例 1.22. compact 位相空間は σ compact である．$\mathbb{R}^n$ は compact ではないが，σ compact である．

問題 1.23. [実射影空間] $x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ に対し，x と原点を通る直線を $\pi(x) = \mathbb{R}x$ と表す．$\mathbb{R}P^m := \{\pi(x) \mid x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}\} = (\mathbb{R}^{m+1} - \{0\})/\sim$ とおき，**実射影空間**という．ただし，$x \sim y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$．$\mathbb{R}P^m$ に商位相を入れる．次を示せ．

(1) 連続な全射 $\pi : \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^m; x \mapsto \pi(x)$ は開写像である．

(2) 全射 $\pi_{|S^m} : S^m \to \mathbb{R}P^m; x \mapsto \pi(x)$ は連続な開写像である．

(3) $\mathbb{R}P^m$ は compact である．

(4) $U_i := \{x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i > 0\}$ とおくと，$\{\pi(U_i) \mid i = 1, \cdots, m+1\}$ は $\mathbb{R}P^m$ の有限開被覆である．

(5) 次の写像は位相同型写像である．

$$\begin{aligned}\varphi_i : \pi(U_i) \to \mathbb{R}^m; [(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1})]\\ \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i} \cdots, \frac{x_{m+1}}{x_i}\right)\end{aligned}$$

(6) $O(m+1)$ は自然に S^m に作用する．この作用は推移的である．さらにこの作用は $O(m+1)$ の $\mathbb{R}P^m$ への作用を誘導する．この作用も推移的である．この作用の $[e_{m+1}] \in \mathbb{R}P^m$ におけるイソトロピー部分群 $O(m+1)_{[e_{m+1}]}$ は

$$O(m+1)_{[e_{m+1}]} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \in O(m), \\ \epsilon = \pm 1 \end{array} \right\} = O(m) \times \{\pm 1\}$$

命題 1.23. 実射影空間 $\mathbb{R}P^m$ は Hausdorff 空間である．

証明. $x, y \in S^m, \pi(x) \neq \pi(y)$ とする．このとき，$y \neq \pm x$．S^m は Hausdorff だから，x の開近傍 U_1, U_2 と y の開近傍 V_1 と $-y$ の開近傍 V_2 で $U_1 \cap V_1 = \emptyset, U_2 \cap V_2 = \emptyset$ となるものが存在する．$U := U_1 \cap U_2, V := V_1 \cap (-V_2)$ とおくと，U, V はそれぞれ x, y の開近傍である．$\pi_{|S^m}$ は開写像だから，$\pi(U), \pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x), \pi(y)$ の開近傍である．U, V の定め方から，$U \cap V = \emptyset, U \cap (-V) = \emptyset$．よって，$\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ が成り立つ． □

例 1.24. [複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$]$z \in \mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ に対し，z を含む $\mathbb{C}^{m+1}$ の複素 1 次元部分空間を $\pi(z) = \mathbb{C}z$ と表す．$\mathbb{C}P^m = \{\pi(z) \mid z \in \mathbb{C}^{m+1} - \{0\}\}$ とおき，$\mathbb{C}P^m$ を**複素射影空間**という．自然な射影 $\pi : \mathbb{C}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^m$ により $\mathbb{C}P^m$ に商位相を入れる．$S^{2m+1} = \{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \|z\| = 1\}$ とおくと，$\pi_{|S^{2m+1}} : S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m$ は全射連続写像になる．これにより，$\mathbb{C}P^m$ は compact になる．さらに次が成り立つ．

(1) $z \in S^{2m+1}$ に対し，$\pi^{-1}\pi(z) = U(1)z$.

ただし，$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$.

(2) $\pi_{|S^{2m+1}} : S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m$ は開写像である．

(3) $\mathbb{C}P^m$ は compact 弧状連結 Hausdorff 空間である．

(4) $U(m+1)$ は自然に S^{2m+1} に作用する．この作用は推移的である．さらにこの作用は $U(m+1)$ の $\mathbb{C}P^m$ への作用を誘導する．この作用も推移的である．この作用の $[e_{m+1}] \in \mathbb{C}P^m$ におけるイソトロピー部分群 $U(m+1)_{[e_{m+1}]}$ は

$$U(m+1)_{[e_{m+1}]} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \in U(m), \\ B \in U(1) \end{array} \right\} = U(m) \times U(1)$$

証明. $x, y \in S^{2m+1}$ に対し，

$$\begin{aligned} \pi(x) = \pi(y) &\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C} \text{ が存在して } y = \alpha x \\ &\Leftrightarrow \alpha \in U(1) \text{ が存在して } y = \alpha x \end{aligned}$$

(1) $\pi^{-1}(\pi(z)) = \{z \in S^{m+1} \mid \pi(w) = \pi(z)\} = \{\alpha z \mid \alpha \in U(1)\} = U(1)z$

(2) 開集合 $U \subset S^{2m+1}$ に対し，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{z \in S^{m+1} \mid \pi(z) \in \pi(U)\} = U(1) \cdot U = \bigcup_{\alpha \in U(1)} \alpha U$$

αU は開集合だから，$\pi^{-1}(\pi(U))$ は S^{2m+1} の開集合である．よって，$\pi_{|S^{2m+1}} : S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m$ は開写像である．

(3) S^{2m+1} は compact（例 1.17）で，$\pi : S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m$ は全射連続写像だから，$\mathbb{C}P^m = \pi(S^{2m+1})$ は compact である (問 1.13).

compact 位相群 $U(1)$ は S^{2m+1} に連続に作用する．S^{2m+1} は Hausdorff 位相空間で，$\mathbb{C}P^m = S^{2m+1}/\sim = S^{2m+1}/U(1)$ だから，命題 1.15 より，$\mathbb{C}P^m$ は Hausdorff 空間である．

(4) $U(m+1) \curvearrowright S^{2m+1}$ が推移的になることを $m = 0, 1, 2, \cdots$ に関する数学的帰納法で示す．$m = 0$ のとき，$U(1) \curvearrowright S^1 = U(1)$ だから主張は成り立つ．$m-1$ のとき主張は成り立つと仮定して，m のときを考察する．自然に $U(m) \subset U(m+1), \mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^{m+1}$ と見なす．数学的帰納法の仮定より，任意の $z \in S^{2m+1}$ に対し，$g_1 \in U(m) \subset U(m+1)$ が存在して，

$g_1 z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_m \\ z_{m+1} \end{pmatrix}$ $(z_m \in \mathbb{R}, z_{m+1} \in \mathbb{C})$ と言う形になる．$m = 0$ のとき主張は成立するから，$g_2 \in U(1) \subset U(m+1)$ が存在して，

$$(g_2 g_1)z = g_2(g_1 z) = g_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_m \\ w_{m+1} \end{pmatrix} \quad (w_{m+1} \in \mathbb{R})$$

という形になる．$SO(2) \subset U(m+1)$ は S^1 に推移的に作用するから，$g_3 \in SO(2)$ が存在して，

$$g_3(g_2 g_1 z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_{m+1}$$

ゆえに，$U(m+1) \curvearrowright S^{2m+1}$ は推移的である．$\pi_{|S^{2m+1}} : S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m$ は全射だから，任意の $z \in \mathbb{C}P^m$ に対し，$x \in S^{2m+1}$ が存在して，$z = \pi(x)$. 上で述べたことから，$g \in U(m+1)$ が存在して，$gx = e_{m+1}$．このとき，$gz = g\pi(x) = \pi(gx) = \pi(e_{m+1})$．ゆえに，$U(m+1) \curvearrowright \mathbb{C}P^m$ も推移的である．$U(m+1)_{[e_{m+1}]}$ の表示は明らかである． $\square$

1.2 ホモトピー

I で閉区間 $[0,1]$ を表す：$I = [0,1]$.

X, Y を位相空間とする．2 つの連続写像 $f, g : X \to Y$ に対し，

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x)$$

を満たす連続写像 $F : X \times I \to Y$ が存在するとき，f と g は**ホモトープ**であるといい，$f \simeq g$ と表す．また，F を f と g を結ぶ**ホモトピー**という．

補題 1.25. X と Y を位相空間とする．上の $\simeq$ は X から Y への連続写像全体のなす集合の上の同値関係である．

証明．$f, g, h : X \to Y$ を連続写像とする．

(i) $F(x,t) = f(x)$ と定義すると，F は f と f を結ぶホモトピーである．よって，$f \simeq f$．

(ii) $f \simeq g$ とすると f と g を結ぶホモトピー F が存在する．$G(x,t) = F(x, 1-t)$ とおくと，G は g と f を結ぶホモトピーになる．よって，$g \simeq f$．

(iii) $f \simeq g, g \simeq h$ と仮定すると，f と g を結ぶホモトピー F と，g と h を結ぶホモトピー G が存在する．このとき，

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ G(x, 2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定めると，$F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ より，H は連続である．$H(x,0) = F(x,0) = f(x), H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ だから，H は f と h を結ぶホモトピーである．ゆえに，$f \simeq h$． □

補題 1.26. X, Y, Z を位相空間とし，$f, g : X \to Y$ をホモトープな 2 つの連続写像とする：$f \simeq g$．

このとき，次の (1), (2) が成り立つ：

(1) 任意の連続写像 $h : Z \to X$ に対し，$fh \simeq gh : Z \to Y$

(2) 任意の連続写像 $k : Y \to Z$ に対し，$kf \simeq kg : X \to Z$

証明．(1) $Z \times I \to Y; (z,t) \mapsto F(h(z), t)$ は fh と gh を結ぶホモトピーになる．

(2) $X \times I \to Z; (x,t) \mapsto k(F(x,t))$ は kf と kg を結ぶホモトピーになる． □

定義 1.27. X, Y を位相空間とする．連続写像 $F : X \to Y$ が**ホモトピー同値写像**であるとは，連続写像 $G : Y \to X$ が存在して，$F \circ G \simeq 1_Y, G \circ F \simeq 1_X$ となるときをいう．ホモトピー同値写像 $F : X \to Y$ が存在するとき，X と Y を**ホモトピー同値**という．

位相同型写像は明らかにホモトピー同値写像になる．

問題 1.24. M_1, M_2, N_1, N_2 を位相空間とする．M_1 と M_2 はホモトピー同値，N_1 と N_2 はホモトピー同値ならば，$M_1 \times N_1$ と $M_2 \times N_2$ はホモトピー同値になることを示せ．

補題 1.28. 2 つの位相空間 X, Y の間の連続写像 $F : X \to Y$ が左及び右ホモトピー逆写像 $L, R : Y \to X$ をもつとする： $LF \simeq 1_X$, $FR \simeq 1_Y$.

このとき，$F : X \to Y$ はホモトピー同値写像である．

証明. $FL \simeq 1_Y$ を示せばよい．まず，$R \simeq L$ を示す．$(LF)R = L(FR)$ より

$$\begin{aligned} R = 1_X R &\simeq (LF)R && (\text{補題 } 1.26, (1)) \\ &= L(FR) \\ &\simeq L1_Y && (\text{補題 } 1.26, (2)) \\ &= L \end{aligned}$$

補題 1.26 より，$L \simeq R$．これを用いて，

$$\begin{aligned} FL &\simeq FR && (\text{補題 } 1.26, (2)) \\ &\simeq 1_Y \end{aligned}$$

再度，補題 1.26 を用いて $FL \simeq 1_Y$． □

次の定理から，ホモトピー同値な位相空間の基本群は同型であることがわかる．

定理 1.29. $F : X \to Y$ が二つの位相空間 X, Y の間のホモトピー同値写像であるとき，任意の $x_0 \in X$ に対し，$F_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, F(x_0))$ は群の同型写像になる．

定義 1.30. 位相空間 X が**可縮**であるとは，X が一点にホモトピー同値である場合をいう．

定義 1.31. 弧状連結位相空間 X が**単連結**であるとは，ある $x \in X$ について，$\pi_1(X, x) = \{1\}$ となる場合をいう．

上記定義において，X は弧状連結と仮定しているから，定義中の「ある」は「任意の」に置き換えても同じことである．

命題 1.32. 可縮な位相空間 X は単連結である．

証明. X を可縮な位相空間とする．$x \in X$ をとり，固定する．ホモトピー同値写像 $f : X \to \{x\}; y \mapsto x, g : \{x\} \to X; x \mapsto g(x)$ が存在する：連続写像 $F : X \times [0,1] \to X, G : \{x\} \times [0,1] \to \{x\}; G(x,t) = x$ が存在して，

$$\begin{aligned} &x = G(x,t) = (gf)(x) = g(x), \\ &F(y,0) = y, F(y,1) = (gf)(y) = g(x) = x \end{aligned}$$

第二式から $x, y \in X$ が連続曲線で結べたので，X は弧状連結である．定理 1.29 より，ホモトピー同値写像 f は基本群の同型写像 $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(\{x\}, x) = \{1\}$ を誘導するから，$\pi_1(X, \{x\}) = \{1\}$. □

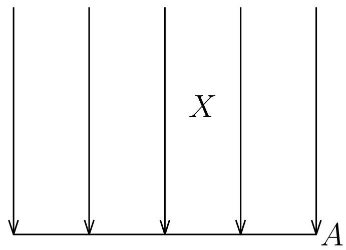
ホモトピー同値の特別なものとして次に述べる変位レトラクトがある．

定義 1.33. X を位相空間，$A \subset X$ とする．連続写像 $r: X \times I \to X$ が次を満たすとする．

(1) 任意の $x \in X$ に対し $r(x, 0) = x$

(2) 任意の $x \in X$ に対し $r(x, 1) \in A$

(3) 任意の $a \in A, t \in I$ に対し，$r(a, t) = a$

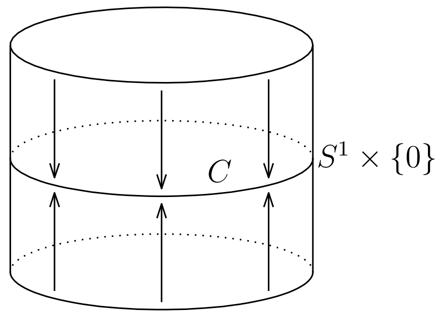


このとき，r を A の X における**変位レトラクション**という．X, A に対し，変位レトラクトが存在するとき，A を X の**変位レトラクト**という．

例 1.34. 円周 $S^1 \times \{0\}$ は円柱 $C = S^1 \times [-1, 1]$ の変位レトラクトである．変位レトラクションは

$$C \times [0, 1] \to C;$$
$$((e^{i\theta}, s), t) \mapsto (e^{i\theta}, (1-t)s)$$

で与えられる．

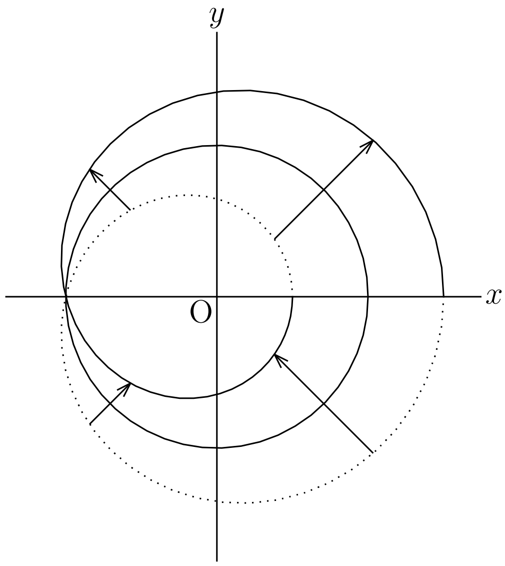


例 1.35. [Möbius の帯] 一般に直線または線分の運動によって作られる曲面を**線織面** (せんしきめん) という．

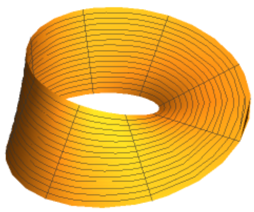
$$Mb: \boldsymbol{r}(s, t) = 2(\cos 2t, \sin 2t, 0) + s(\cos 2t \cos t, \sin 2t \cos t, \sin t),$$
$$(0 \leq t \leq \pi, -1 \leq s \leq 1)$$

で定義される曲面は t を固定するごとに線分になるから線織面である．これを **Möbius の帯**という．

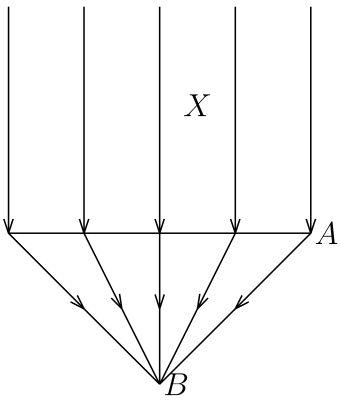
t_0 を固定するごとに線分 $\boldsymbol{r}(s, t_0)$ $(-1 \le s \le 1)$ の長さは 2 になる．この線分の中点は t_0 を動かすと，xy 平面内の原点を中心とする半径 2 の円周 $\boldsymbol{r}(0, t)$ になる．(右図は，Möbius の帯を真上（z 軸の正の方向）から見たものである)



$\boldsymbol{r}(1, t)$ や $\boldsymbol{r}(-1, t)$ の動きを見ると，Möbius の帯は下の図のようなゴムのように伸縮できる素材でできた中身の詰まった長方形の↑と↓を貼り合わせた図形であるとわかる．半径 2 の円周 $S^1(2)$ は Mb の変位レトラクトである．



補題 1.36. X を位相空間，$B \subset A \subset X$ とする．A が X の変位レトラクト，B が A の変位レトラクトならば，B は X の変位レトラクトである．



証明. A は X の変位レトラクトだから，連続写像 $r : X \times I \to X$ が存在して，

(1) $r(x, 0) = x \quad (x \in X)$

(2) $r(x,1) \in A \quad (x \in X)$

(3) $r(a,t) = a \quad (a \in A, t \in I)$

B は A の変位レトラクトだから，連続写像 $s : A \times I \to A$ が存在して，

(4) $s(a,0) = a \quad (a \in A)$

(5) $s(a,1) \in B \quad (a \in A)$

(6) $s(b,t) = b \quad (b \in B, t \in I)$

写像 $u : X \times I \to X$ を

$$u(x,t) = \begin{cases} r(x,2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ s(r(x,1), 2t-1) & (1/2 < t \leq 1) \end{cases}$$

と定める．$s(r(x,1),0) = r(x,1)$ だから，u は連続である．さらに，

(7) (1) より $u(x,0) = r(x,0) = x \quad (x \in X)$

(8) (2) より $r(x,1) \in A \quad (x \in X)$. (5) より $u(x,1) = s(r(x,1),1) \in B$

(9) $B \subset A$ だから，(3) より $0 \leq t \leq 1/2$ のとき，$u(b,t) = r(b,2t) = b \quad (b \in B)$．$B \subset A$ だから，$b \in B$ に対し，(3) より $r(b,1) = b$. $1/2 < t \leq 1$ のとき，(6) より

$$u(b,1) = s(r(b,1), 2t-1) = s(b, 2t-1) = b$$

ゆえに主張が成り立つ． □

命題 1.37. X を位相空間，$A \subset X$ とする．A が X の変位レトラクトならば，包含写像 $i : A \to X$ はホモトピー同値写像である．特に，A と X はホモトピー同値である．

証明. ホモトピー同値写像を構成する．包含写像 $i : A \to X$ は連続である．$f : X \to A; x \mapsto r(x,1)$ も連続である．$a \in A$ に対し，$(f \circ i)(a) = r(a,1) = a$ だから，$f \circ i = 1_A$. $x \in X$ に対し，$(i \circ f)(x) = r(x,1)$. $r : X \times I \to X$ は 1_X と $i \circ f$ を結ぶホモトピーになる．ゆえに，i はホモトピー同値写像であり，$i \circ f \simeq 1_X$. □

定理 1.29 と命題 1.37 から次が得られる．

系 1.38. 上の命題の仮定の下で，任意の $a_0 \in A$ に対し，$i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ は群の同型写像である．

例 1.39. 例 1.34 より，円柱 $C = S^1 \times [-1, 1]$ について，

$$\pi_1(C) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

例 1.40. 例 1.35 より，Möbius の帯 Mb について，

$$\pi_1(Mb) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

上記二例において，$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$であることを用いた．$c(t) := e^{2\pi i t}$ $(0^leqt \leq 1)$ とおくと，

$$\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1); n \mapsto [c(t)^n]$$

は群の同型写像になる．よって，任意の連続曲線 $\alpha : I = [0, 1] \to S^1, \alpha(0) = \alpha(1)$ に対し，一意に $n \in \mathbb{Z}$ が存在して，$[\alpha] = [c^n]$ が成り立つ．このとき，n を α の**写像度**といい，$n = \deg \alpha$ と表す．α の写像度は，α が S^1 を反時計回りに（正味）回転した回数を表している．

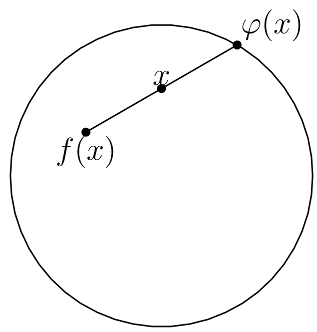
系 1.38 の応用として，次の印象的な定理を示そう．

定理 1.41. [**Brower の不動点定理**] 連続写像 $f : V^2 \to V^2$ は不動点をもつ．ただし，$V^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$.

証明. 仮に f が不動点をもたないとしてみる．

任意の $x \in V^2$ について，$f(x) \neq x$. x と $f(x)$ を結ぶ線分を x の方に延長し，$S^1 = \{x \in V^2 \mid \|x\| = 1\}$ との交点を $\varphi(x)$ と定めることができる．$t \geq 0$ が存在して，

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + t(x - f(x)) \\ &= tx + (1 - t)f(x)\end{aligned}$$



これを $\|\varphi(x)\|^2 - 1 = 0$ に代入し，t に関する 2 次方程式

$$\|x - f(x)\|^2 t^2 - 2(\|f(x)\|^2 - \langle x, f(x)\rangle)t - (1 - \|f(x)\|^2) = 0$$

が得られる．これを解いて，

$$(0 \leq)t =: t(x) = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}, \qquad \text{ただし}$$

$$a = \|x - f(x)\|^2 > 0, b = \|f(x)\|^2 - \langle x, f(x)\rangle, c = 1 - \|f(x)\|^2 > 0$$

よって，$\varphi(x) = t(x)x + (1 - t(x))f(x) : V^2 \to S^1$ は連続関数である．$\varphi|S^1 = 1_{S^1}$ だから，$r : V^2 \times I \to V^2; (x,t) \mapsto t\varphi(x) + (1-x)x$ は，V^2 の S^1 への変位レトラクションとなる．系 1.38 より，$\{0\} = \pi_1(V^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ となり，矛盾が起こる． □

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ を応用して次も示せる．

定理 1.42 (**代数学の基本定理** (Gauss))**.** $n = 1, 2, \cdots$ を自然数とし，複素数を係数とする n 次多項式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C})$$

を考える．代数方程式 $P(z) = 0$ は $\mathbb{C}$ 内に解をもつ．

これを示すために，次の補題を準備する：

補題 1.43. 連続関数 $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は，ある $R > 0$ に対し，$P(z) \neq 0$ ($|z| \leq R$) を満たすとする．$0 \leq r \leq R$ に対し，連続関数 $\alpha_r : I \to S^1$ を

$$\alpha_r(s) := \frac{P(re^{2\pi i s})}{|P(re^{2\pi i s})|} \cdot \frac{|P(r)|}{P(r)}$$

と定める．このとき，$0 \leq r \leq R$ によらず，$\deg \alpha_r = 0$.

この補題は，上記の仮定を満たす関数 P は定数関数 ($\neq 0$) と似た振舞いをするということを意味している．

証明. $\alpha_r(s)$ は $\alpha_0(s) = 1$ (定値写像)，$\alpha_r(0) = \alpha_r(1) = 1$ を満たす．連続写像 $F : I \times I \to S^1$ を

$$F(s,t) = \frac{P((1-t)re^{2\pi i s})}{|P((1-t)re^{2\pi i s})|} \cdot \frac{|P((1-t)r)|}{P((1-t)r)}$$

と定めると，$F(s,0) = \alpha_r(s), F(s,1) = 1 = \alpha_0(s), F(0,t) = 1$．ゆえに，$F$ は定値写像 α_0 と α_r を結ぶ端点を固定したホモトピーとなる．よって，$\deg \alpha_r = \deg \alpha_0 = 0$. □

代数学の基本定理の証明. ($r \geq 0$ が十分大きいとき，$P(re^{i\theta})$ は，$a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ とおいた $(re^{i\theta})^n$ と似た振る舞いをするはずである．) r が十分大きいとき，$|P(re^{i\theta})| > \frac{1}{2} r^n$ となることを示す．実際，

$$\begin{aligned}
&|P(re^{i\theta})| = |a_0 + a_1 re^{i\theta} + \cdots + a_{n-1}(re^{i\theta})^{n-1} + (re^{i\theta})^n| \\
&\geq |(re^{i\theta})^n| - |a_0 + a_1 re^{i\theta} + \cdots + a_{n-1}(re^{i\theta})^{n-1}| \quad (|\alpha + \beta| \geq |\alpha| - |\beta|) \\
&\geq \frac{1}{2} r^n + \left(\frac{1}{2} r^n - (|a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1}) \right) > 0
\end{aligned}$$

十分大きい $r \geq 0$ に対し，連続関数 $I \times I \to \mathbb{C}$ を

$$G(s,t) := (1-t)P(re^{2\pi is}) + tr^n e^{2\pi isn} = P(re^{2\pi is}) - t\sum_{j=0}^{n-1} a_j (re^{2\pi is})^j$$

と定める．このとき，$G(s,t) \neq 0$ を示す．実際,

$$\begin{aligned}|G(s,t)| &\geq |P(re^{2\pi is})| - t|\sum_{j=0}^{n-1} a_j (re^{2\pi is})^j| \qquad (|\alpha+\beta| \geq |\alpha| - |\beta|)\\ &\geq \frac{1}{2}r^n - \sum_{j=0}^{n-1}|a_j|r^j > 0\end{aligned}$$

そこで，十分大きい $r \geq 0$ に対し，連続写像 $H : I \times I \to S^1$ を

$$H(s,t) := \frac{G(s,t)}{|G(s,t)|} \cdot \frac{|G(0,t)|}{G(0,t)}$$

と定めると，$H(0,t) = H(1,t) = 1$,

$$H(s,0) = \frac{G(s,0)}{|G(s,0)|} \cdot \frac{|G(0,0)|}{G(0,0)} = \frac{P(re^{2\pi is})}{|P(re^{2\pi is})|} \cdot \frac{|P(r)|}{P(r)} =: \alpha_r(s), \qquad (1.6)$$

$$H(s,1) = \frac{G(s,1)}{|G(s,1)|} \cdot \frac{|G(0,1)|}{G(0,1)} = e^{2\pi isn} =: \beta(s)$$

よって，$n = \mathrm{deg}\beta = \mathrm{deg}\alpha_r$ が得られる（ここまで予想通り）.

仮に,$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\} = \emptyset$ になったととすると，補題 1.43 の $R > 0$ をいくらでも大きくとれる．よって補題 1.43 より，$n = \mathrm{deg}\alpha_r = \mathrm{deg}\alpha_0 = 0$ となり，矛盾が得られた. □

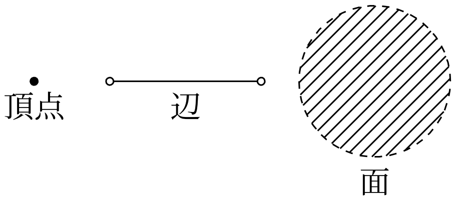
1.3 胞体分割

X を Hausdorff 空間とする.

♡ [（少し長めの）導入] X を次のようにいくつかの頂点，辺，面,$\cdots$ に分割したい：

$X =$ 頂点 $1 \cup$ 頂点 $2 \cup \cdots \cup$ 辺 $1 \cup$ 辺 $2 \cup \cdots\cdots \cup$ 面 $1 \cup$ 面 $2 \cup \cdots$ (互いに素)

ただし，頂点，辺，面のイメージは次である.



これらが定義できたとして，頂点，辺，面をそれぞれ X の 0 次元，1 次元，2 次元胞体という．一般の位相空間 k 次元胞体を定義するためには，とりあえず次のようにすればよいことが思いつく．

$$E^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 1\}$$

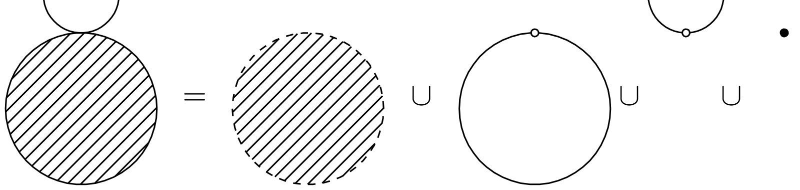
とおく．$A \subset X$ が X の k 次元胞体であるということを，A は E^k に位相同型と**仮に**定義してみる．位相同型写像 $\varphi : E^k \to A$ を A の特性写像と**仮に**呼ぶ．X の胞体写像の全体を $\{\varphi_\lambda : E^{n(\lambda)} \to e^{n(\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda\}$（ただし，$e^{n(\lambda)}$ は X の $n(\lambda)$ 次元胞体）と表すと，はじめに述べた等式は

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e^{n(\lambda)} \qquad (\text{互いに素})$$

となる．これを X の胞体分割と**仮に**呼ぶ．X の p 次元以下の胞体の和集合 X^p を X の p-スケルトンという：

$$X^p := \bigcup_{n(\lambda) \leq p} e^{n(\lambda)}$$

たとえば，次のように分解したい：



よく観察すると，上で述べた一般的な事柄は，この例のもつ特徴をうまく反映していないことがわかる．なぜなら，上の胞体分割の仮の定義

では，次元の異なる胞体の間に何の関係もなくバラバラであるのに対し，例の場合には

$$\text{各}\, n\, \text{次元胞体の「ヘリ」} \subset X^{n-1}$$

が成り立っているからである．n 次元胞体の「ヘリ」を定義するためには，胞体写像と胞体の定義を後述のように変更すればよいことに気付く．このようにして以下の定義に到達する．[導入終] ♡

V^n から X への連続写像 φ_n で $\varphi_n|E^n : E^n \to e^n := \varphi_n(E^n)$ が位相同型写像となるものを e^n の**特性写像**という．e^n を X の n **次元胞体**[1]という．0 次元胞体は X の点のことであると約束し，0 次元胞体には特性写像は考えない．

例 1.44. $X = V^n$ のとき，E^n は V^n の n 次元胞体で，恒等写像 $i : V^n \to X$ は E^n の特性写像である．

定義 1.45. $\{\varphi_\lambda : V^{n(\lambda)} \to X \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の特性写像の族とする．$e^{n(\lambda)} := \varphi_\lambda(E^{n(\lambda)})$ とおく．これらが

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e^{n(\lambda)} \qquad (\text{互いに素}), \tag{1.7}$$

$$\varphi_\lambda(S^{n(\lambda)-1}) \subset X^{n(\lambda)-1} := \bigcup_{m\leq n(\lambda)-1} e^m \tag{1.8}$$

を満たすとき，(1.7) を X の**胞体分割**という．また，X を胞体 $\{e^{n(\lambda)}\}$ をもつ**胞複体**という．このとき，

$$X^p := \bigcup_{n(\lambda)\leq p} e^{n(\lambda)}$$

とおき，X^p を X の p-**スケルトン**という．

(1.7) と (1.8) より，

$$e^{n(\lambda)} \cap \varphi(S^{n(\lambda)-1}) = \emptyset \tag{1.9}$$

Λ が有限集合のとき，(1.7) を X の**有限胞体分割**，X を**有限胞複体**という．

例 1.46. 1 点からなる集合 $X = \{x\}$ は，これ自身で X の胞体分割になる．

例 1.47. $X = I = [0,1]$ のとき，$e^0_1 = \{0\}, e^0_2 = \{1\}, e^1 = (0,1)$ とおくと，$X = e^0_1 \cup e^0_2 \cup e^1$ は X の胞体分割になる．

---

[1] $\varphi_n(V^n - E^n)$ が [導入] で述べた「ヘリ」になる．

証明．恒等写像 $i : I \to X$ は e^1 の特性写像であり，$\dot{I} = \{0, 1\}$ だから，$i(\dot{I}) = \{e^0_1, e^0_2\} = X^0$ となっている．他の条件は明らかに満たされる． □

例 1.48. $X = \mathbb{R}$ のとき，$n \in \mathbb{Z}$ に対し，$e^1_n = (n, n+1), e^0_n = \{n\}$ とおくと，$X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(e^1_n \cup e^0_n)$ は X の胞体分割になる．

証明．$\varphi_n : V^1 = [-1, 1] \to X; t \mapsto \frac{1}{2}(t+1) + n$ は同相写像 $\varphi_n : E^1 = (-1, 1) \to e^1_n$ を誘導する．よって，φ_n は e^1_n の特性写像である．さらに，

$$\varphi_n(S^0) = \{e^0_n, e^0_{n+1}\} \subset X^0 = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} e^0_m$$

となる．他の条件は明らかに満たされる． □

例 1.49. $X = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ のとき，$e^0 = \{(0, \cdots, 0, 1)\}, e^n = S^n - e^0$ とおくと，$S^n = e^0 \cup e^n$ は S^n の胞体分割になる．

証明．連続写像 $\varphi : V^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \to S^n$ を

$$\varphi : V^n \to S^n; x \mapsto (2\sqrt{1 - \|x\|^2}x, 2\|x\|^2 - 1)$$

と定める．このとき，

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)\|^2 &= 4(1 - \|x\|^2)\|x\|^2 + (2\|x\|^2 - 1)^2 \\ &= 4\|x\|^2 - 4\|x\|^4 + 4\|x\|^4 - 4\|x\|^2 + 1 = 1\end{aligned}$$

だから，確かに $\varphi(x) \in S^n$ となっている．また，$\varphi(x) \in e^0 \Leftrightarrow x \in S^{n-1} = \partial V^n$．$\varphi|E^n : E^n \to e^n$ は単射になる．連続写像 $\psi : e^n \to E^n$ を

$$\psi : e^n \to E^n; (y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - y_{n+1}}}(y_1, \cdots, y_n)$$

と定めると，$\varphi|E^n$ と ψ は互いに逆写像になる．よって，$\varphi|E^n : E^n \to e^n$ は位相同型写像になる．ゆえに，e^n は S^n の n 次元胞体で，φ はその特性写像になる．$\varphi(\partial V^n) = e^0 = X^{n-1}$ となる．他の条件は明らかに満たされる． □

補題 1.50. 胞複体 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ は Hausdorff 空間とする．このとき，X の各胞体 e に対し，その特性写像を $\varphi : V^n \to X$ とすると，$\varphi(V^n) = \bar{e}$．

証明．V^n は compact (定理 1.16) だから，問題 1.9 において，$f = \varphi, A = E^n$ とおくと主張が得られる． □

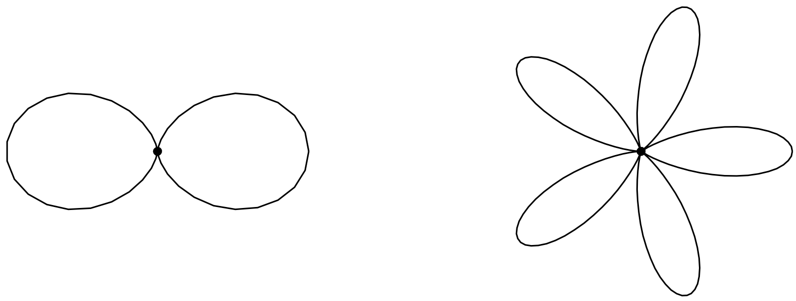
例 1.51. 円周 S^1 の k 個のコピー $S_1^1, \cdots, S_k^1$ を 1 点で束ねた図形を k **ブーケ**といい，$S_1^2 \vee \cdots \vee S_k^1$ で表す：

$$N = (1, 0) \in S^1, \quad S_i^1 = \{(x, i) \mid x \in S^1\} \ (i = 1, \cdots, k)$$

とおくとき，

$$S_1^2 \vee \cdots \vee S_k^1 = \coprod_{i=1}^{k} S_i^1 / \{(N, 1) = \cdots = (N, k)\}$$

下図は，2-ブーケ (左) と 5-ブーケ (右) である．



k ブーケの胞体分割は

$$S_1^2 \vee \cdots \vee S_k^1 = e^0 \cup \underbrace{e_1^1 \cup \cdots \cup e_k^1}_{k}$$

である．

k ブーケの基本群は k 個の文字 $x_1, \cdots, x_k$ で生成される自由群 F_k に同型である：

$$\pi_1(S_1^2 \vee \cdots \vee S_k^1) = F_k = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$$

[参考 1] k-ブーケを平面内の曲線として実現したときの一つの表示式は，極座標によって

$$r(\theta) = 1 + \cos(k\theta)(\geq 0) \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

によって与えられる．この曲線が k-ブーケであることは

$$\begin{aligned} r(\theta) = 0 \quad (0 \leq \theta < 2\pi) &\Leftrightarrow \cos(k\theta) = -1 \Leftrightarrow k\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{k}(1 + 2m)\pi \quad (m = 0, 1, \cdots, m - 1) \end{aligned}$$

となることから確かめられる．

[参考 2] k-ブーケのホモロジー群：

$$C_2=\{0\}\xrightarrow{\partial=0}C_1\xrightarrow{\partial=0}C_0=\mathbb{Z}[e_0]\xrightarrow{\partial=0}C_{-1}=\{0\}$$

だから，$Z_1=C_1\supset B_1=\{0\}, Z_0=C_0\supset B_0=\{0\}$．よって

$$H_1=C_1=\mathbb{Z}[e_1^1]\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}[e_k^1]\cong\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z},\quad H_0=C_0=\mathbb{Z}[e_0]\cong\mathbb{Z}$$

例 1.52. 自由群 $F_k=\langle x_1,\cdots,x_k\rangle$ の可換化 F_k^{ab}(F_k に規則 $xy=yx$ を組み込んだもの) は $\mathbb{Z}^k$ に同型である．実際，$F_k^{ab}\to\mathbb{Z}^k; x_1^{m_1}\cdots x_k^{m_k}\mapsto(m_1,\cdots,m_k)$ は群の同型写像を与える．

定義 1.53. $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}e_\lambda$ を包複体とする．部分集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ に対し，$A:=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}e_\lambda$ が再び胞複体になるとき，A を X の**部分複体**という．

例 1.54. 例 1.48 において，閉区間 $[0,1]$ は $X=\mathbb{R}$ の部分複体であるが，$(0,1]$ は部分複体ではない．

例 1.55. Hausdorff 位相空間 X は $X=\bigcup_{x\in X}\{x\}$ によって胞体分割になる．

上の例は今までの例と異なる性質をもつ．これまであげた例では最大次元胞体が X の開集合になっていた．胞複体に次の CW 性を課すと最大次元胞体が X の開集合になることが示される (命題 1.61)．

定義 1.56. 胞複体 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}e_\lambda$ が **CW 複体**であるとは，次の条件 (C), (W) を満たす場合をいう．

(C) X の各胞体 e に対し，e を含む X の有限部分複体が存在する．

(W) $F\subset X$ に対し，

F は X の閉集合 $\Leftrightarrow$ X の各胞体 e について，$F\cap\bar{e}$ が $\bar{e}$ の閉集合

(W) 中の $\Leftrightarrow$ は $\Leftarrow$ と置き換えても同じことである．

補題 1.57. 定義 1.56 の条件 (W) は

(W') $F\subset X$ に対し，

F は X の開集合 $\Leftarrow$ X の各胞体 e について，$F\cap\bar{e}$ が $\bar{e}$ の開集合

に置き換えても同じことである．

証明．$\bar{e} - F \cap \bar{e} = \bar{e} \cap (X - F)$ より明らかである．　□

例 1.58. Hausdorff 位相空間 X に対し，$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ が CW 複体 $\Leftrightarrow$ X は離散位相空間．

証明．$\{x\}$ は $\{x\}$ を含む X の有限部分複体だから，胞体分割 $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ に対し，条件 (C) は常に満たされる．($\Leftarrow$) は X の任意の部分集合が開集合だから，明らかに成り立つ．そこで，($\Rightarrow$) を示す．$\{x\}$ が X の開集合であることを言えばよい．X は Hausdorff なので，各胞体 $\{y\}$ は閉集合，よって，$\overline{\{y\}} = \{y\}$．これを用いて

$$\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \begin{cases} \emptyset & (x \neq y), \\ \{y\} & (x = y) \end{cases}$$

$x \neq y, x = y$ いずれの場合も $\{x\} \cap \overline{\{y\}}$ は $\overline{\{y\}}$ の開集合である．よって，X は離散位相空間である．　□

補題 1.59. 有限胞複体 X は CW 複体である．

証明．有限胞複体 X は CW 複体の条件 (C) を明らかに満たすから，条件 (W) を満たすことをいう．X の各胞体 e に対し，$F \cap \bar{e}$ が $\bar{e}$ の閉集合と仮定する．$\bar{e}$ は X の閉集合だから，$F \cap \bar{e}$ は X の閉集合でもある．$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ より，

$$F = F \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{e_\Lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (F \cap \bar{e_\lambda})$$

Λ は有限集合だから，F は X の閉集合である．　□

補題 1.60. X を Hausdorff 空間である胞複体とする．X の任意の胞体 e に対し，e は $\bar{e}$ の開集合である．

証明．e の特性写像を $\varphi : V^m \to X$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} e &= \varphi(E^m) = \varphi(V^m - S^{m-1}) = \varphi(V^m) - \varphi(S^{m-1}) \quad ((1.9) \text{ より}) \\ &= \bar{e} - \varphi(S^{m-1}) \qquad (\text{補題 } 1.50) \\ &= \bar{e} \cap (X - \varphi(S^{m-1})) \end{aligned}$$

S^{m-1} は compact(定理 1.16) であり，φ は連続だから，$\varphi(S^{m-1})$ も compact である (問題 1.13)．X は Hausdorff だから，$\varphi(S^{m-1})$ は X の閉集合である (補題 1.13)．よって，$X - \varphi(S^{m-1})$ は X の開集合であり，e は $\bar{e}$ の開集合である．　□

命題 1.61. Hausdorff 空間である CW 複体 X の最高次元の胞体 e^n は X の開集合である.

証明. X は CW 複体だから, X の任意の胞体 e に対し, $\bar{e} \cap e^n$ が $\bar{e}$ の開集合であることを示せばよい (補題 1.57). e の特性写像を $\varphi : V^m \to X$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \varphi(V^m) \qquad \text{(補題 1.50)}\\ &= \varphi(S^{m-1} \cup E^m) = \varphi(S^{m-1}) \cup \varphi(E^m) = \varphi(S^{m-1}) \cup e\end{aligned}$$

$\varphi(S^{m-1}) \subset X^{m-1}$ で, e^n は最高次元の胞体だから,

$$\bar{e} \cap e^n = e \cap e^n = \begin{cases} e & (e^n = e), \\ \emptyset & (e^n \neq e) \end{cases}$$

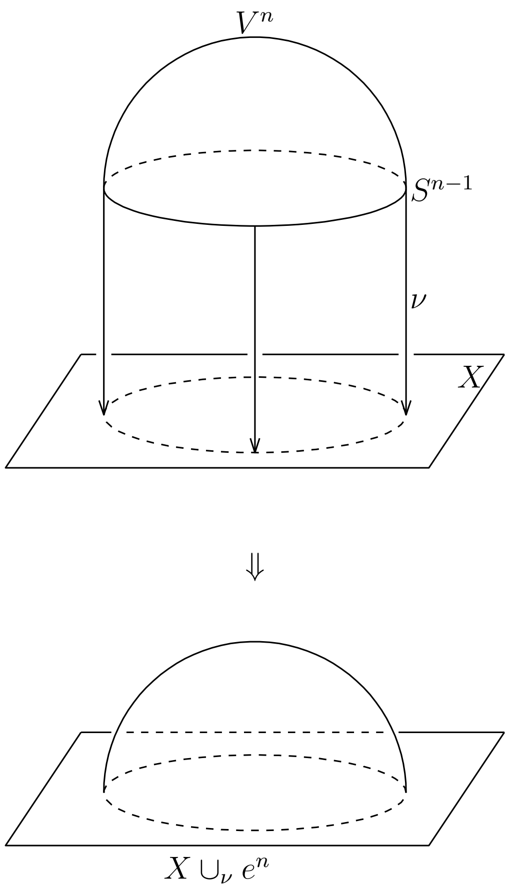
補題 1.60 より, $\bar{e} \cap e^n$ は $\bar{e}$ の開集合である. □

特に, CW 複体 X が多様体ならば, 最高次元の胞体 e^n に対し, $n = \dim X$.

定義 1.62. Hausdorff 位相空間 X と連続写像 $\nu : \dot{V}^n = S^{n-1} \to X$ が与えられたとする．位相和 $X \cup V^n$ において $p \in S^{n-1}$ と $\nu(p) \in X$ を同一視する同値関係 $\sim$ を入れる．$(X \cup V^n)/\sim$ に商位相を入れた位相空間を $X \cup_\nu e^n$ と表し，X に n 次元胞体 e^n を写像 ν で**接着した空間**という．

$$X \cup_\nu e^n := (X \cup V^n)/\sim$$

S^{n-1} は compact(例 1.17) で ν は連続だから，$\nu(S^{n-1})$ も compact である (問題 1.13)．X は Hausdorff 位相空間だから $\nu(S^{n-1})$ は X の閉集合である (補題 1.13)．



問題 1.25. 次を示せ．compact 位相空間 X に n 次元胞体 e^n を写像 ν で接着した空間 $X \cup_\nu e^n = (X \cup V^n)/\sim$ は compact である．

問題 1.26. $X = V_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ に e^n を包含写像 $\iota : S^{n-1} \to X$ により，接着した空間 $X \cup_\iota e^n$ は S^n に位相同型であることを示せ．

補題 1.63. Hausdorff 位相空間 X に n 次元胞体 e^n を連続写像 $\nu : S^{n-1} \to X$ により接着した空間を $X \cup_\nu e^n$ とする．$\pi : X \cup V^n \to X \cup_\nu e^n$ で射影を表す．このとき，次が成り立つ：

(1) $\pi_{|X} : X \to \pi(X)$ により，X と $\pi(X)$ は位相同型である．

(2) $\pi_{|E^n} : E^n \to e^n = X \cup_\nu e^n - \pi(X)$ により，E^n と e^n は位相同型である．

証明. π は連続だから，$\pi_{|X}, \pi_{|E^n}$ は連続である．$\pi_{|X}, \pi_{|E^n}$ は全単射だから，証明すべきことは $\pi_{|X}, \pi_{|E^n}$ が開写像になることである (問題 1.15)．

(1) $U \subset X$ を X の開集合とする．$\pi(U)$ が $\pi(X)$ の開集合であることを示せばよい．$\nu : S^{n-1} \to X$ は連続だから，$\nu^{-1}(U)$ は S^{n-1} の開集合である．よって，V^n の開集合 W が存在して，

$$\nu^{-1}(U) = S^{n-1} \cap W. \tag{1.10}$$

このとき，$U \cup W$ は $X \cup V^n$ の開集合である．次の (a), (b) を示せばよい．

(a) $\pi^{-1}(\pi(U \cup W)) = U \cup W$.

(b) $\pi(U) = \pi(U \cup W) \cap \pi(X)$.

実際,(a), (b) が示されたとすると，(a) より $\pi(U \cup W)$ は $X \cup_\nu e^n$ の開集合となる．(b) より，$\pi(U)$ は $\pi(X)$ の開集合となる．そこで (a), (b) を示そう．

(a) については，まず，

$$\pi^{-1}(\pi(U \cup W)) = \{x \in X \cup V^n \mid \pi(x) \in \pi(U \cup W)\} \supset U \cup W$$

$\subset$ を示すために，$x \in X \cup V^n$ が $\pi(x) \in \pi(U \cup W)$ を満たすとする．$y \in U \cup W$ が存在して，$\pi(x) = \pi(y)$．次の 4 通りに場合分けする．

(i) $x \in X, y \in U (\subset X)$

(ii) $x \in X, y \in W$

(iii) $x \in V^n, y \in U$

(iv) $x \in V^n, y \in W$

$\pi_{|X}$ は単射だから，(i) のとき，$x = y \in U (\subset U \cup W)$

(ii) のとき，$y \in S^{n-1} \cap W = \nu^{-1}(U)$ であり，$x = \nu(y) \in U (\subset U \cup W)$.

(iii) のとき，$x \in S^{n-1}$ であり，$\nu(x) = y \in U$．よって，$x \in \nu^{-1}(U) = S^{n-1} \cap W \subset W$.

(iv) のとき：

$x \in E^n$ ならば，$x = y \in E^n \cap W \subset W$.

$x \in S^{n-1}$ ならば，$y \in S^{n-1} \cap W$ であり，$\nu(x) = \nu(y) \in U$．ゆえに，$x \in \mu^{-1}(U) = S^{n-1} \cap W \subset W$.

(b) については $\subset$ は明らかである．

$$\begin{aligned}
\pi(U \cup W) \cap \pi(X) &= \pi(U) \cup (\pi(W) \cap \pi(X)) \qquad (\pi(U) \subset \pi(X)) \\
&= \pi(U) \cup (\pi(S^{n-1} \cap W) \cap \pi(X)) \\
&= \pi(U) \cup (\pi(\nu^{-1}(U)) \cap \pi(X)) \qquad ((3.28)\text{ より}) \\
&= \pi(U) \qquad (\pi(\nu^{-1}(U)) \cap \pi(X) \subset \pi(U))
\end{aligned}$$

(2) $O \subset E^n$ を E^n の開集合とする．このとき，O は V^n の開集合でもある．よって，O は $X \cup V^n$ の開集合でもある．$\pi_{|E^n}(O) = \pi(O) = \pi(O) \cap e^n$ が e^n の開集合であうことを示す．そのためには $\pi(O)$ が $X \cup_\nu e^n$ の開集合であることを示せばよい．$X \cup_\nu e^n$ の位相の入れ方から，$\pi^{-1}(\pi(O))$ が $X \cup V^n$ の開集合であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(O)) &= \{x \in X \cup V^n \mid \pi(x) \in \pi(O)\} \\
&= \{x \in V^n \mid \pi(x) \in \pi(O)\} \qquad (\pi(O) \subset X \cup_\nu e^n - \pi(X)) \\
&= \{x \in E^n \mid \pi(x) \in \pi(O)\} \qquad (\pi(S^{n-1}) \subset \pi(X)) \\
&= O \qquad (\pi_{|E^n}:\text{全単射})
\end{aligned}$$

ゆえに主張が成り立つ． □

補題 1.64. Hausdorff 空間 X に n 次元胞体 e^n を連続写像 $\nu : S^{n-1} \to X$ により接着した空間 $X \cup_\nu e^n$ はまた Hausdorff 空間である．

証明. $[x], [y] \in X \cup_\nu e^n, [x] \neq [y]$ とする．x と y の立場を換えれば，次の 4 通りに場合分けされる：

(1) $x, y \in X$

(2) $x, y \in V^n - S^{n-1}$

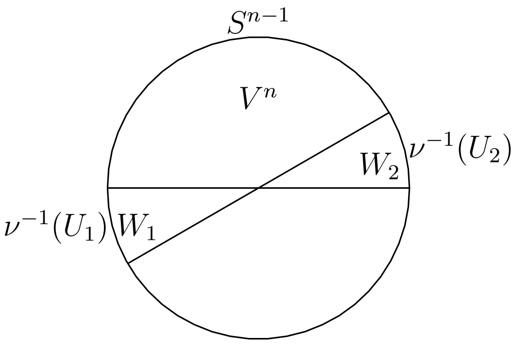
(3) $x \in X - \nu(S^{n-1}), y \in V^n - S^{n-1}$

(4) $x \in \nu(S^{n-1}), y \in V^n - S^{n-1}$

(1) の場合：x, y を分離する X における開近傍 U_1, U_2 をとる．$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ より，$\nu^{-1}(U_1) \cap \nu^{-1}(U_2) = \emptyset$．$\nu$ は連続で，U_i は X の開集合だから，$\nu^{-1}(U_i)$ は S^{n-1} の開集合である．V^n の開集合 W_i を

$$\nu^{-1}(U_i) = S^{n-1} \cap W_i \ (i = 1, 2), \qquad W_1 \cap W_2 = \emptyset$$

ととれる (下の図を参照).



補題 1.64 の証明中より，$\pi(U_i \cup W_i)$ は $X \cup_\nu e^n$ の開集合である．さらに，

$$x = \pi(x) \in \pi(U_1) \subset \pi(U_1 \cup W_1)$$

同様に，$y \in \pi(U_2 \cup W_2)$．$\nu^{-1}(U_1) \cap \nu^{-1}(U_2) = \emptyset$ より，$\pi(U_1 \cup W_1) \cap \pi(U_2 \cup W_2) = \emptyset$．ゆえに，$\pi(U_1 \cup W_1)$ と $\pi(U_2 \cup W_2)$ は x と y を分離する $X \cup_\nu e^n$ の開集合である．

(2), (3) の場合も (1) の場合と同様である．

(4) の場合：$x = \nu(z)$ $(z \in S^{n-1})$ と表示すると $y \neq z$．V^n は Hausdorff 位相空間で，S^{n-1} は V^n の閉集合だから，y の V^n における開近傍 U と z の V^n における開近傍 V を $U \subset V^n - S^{n-1}, U \cap V = \emptyset$ ととれる．このとき，$\pi(U)$ は $[y]$ の $X \cup_\nu e^n$ における開近傍である．$X \cup V$ は位相和 $X \cup V^n$ の開集合である．$\pi(X \cup V) = X \cup \pi(V)$ は $X \cup_\nu e^n$ の $[x]$ における開近傍であり，$\pi(U) \cap \pi(X \cup V) = \emptyset$．

□

命題 1.65. 有限 CW 複体 X に n 次元胞体 e^n を連続写像 $\nu : S^{n-1} \to X^{n-1} \subset X$ により接着した空間 $X \cup_\nu e^n$ はまた有限 CW 複体である．

証明. 補題 1.64 より，$X \cup_\nu e^n$ は Hausdorff 空間である．

X は有限 CW 複体だから，有限集合 Λ と特性写像 $\varphi_\lambda : V^{n(\lambda)} \to X$ が存在して，$e^{n(\lambda)} = \varphi_\lambda(E^{n(\lambda)})$ とおくとき，

$$X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} e^{n(\lambda)}, \quad \varphi_\lambda(S^{n(\lambda)-1}) \subset X^{n(\lambda)-1}$$

となるものが存在する．包含写像 $\iota : X \to X \cup V^n$ と射影 $\pi : X \cup V^n \to X \cup_\nu e^n$ は連続だから，$\tilde{\varphi}_\lambda : V^{n(\lambda)} := \pi\iota\varphi_\lambda : V^{n(\lambda)} \to X \cup_\nu e^n$ は連続で

ある．ι は中への位相同型写像であり，$\pi|X : X \to \pi(X)$ は位相同型写像（補題 1.64）だから，$\tilde{\varphi}_\lambda|E^n : E^n \to e^{n(\lambda)}(\subset X \cup V^n)$ は位相同型写像である．よって，$\tilde{\varphi}_\lambda$ は $e^{n(\lambda)}$ の特性写像である．$X \cup_\nu e^n$ において $X \cap e^n = \emptyset$ だから，

$$X \cup_\nu e^n = \coprod_{\lambda \in \Lambda} e^{n(\lambda)} \cup e^n$$

$X \cup_\nu e^n$ の m スケルトンは

$$(X \cup_\nu e^n)^m = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\coprod_{k(\lambda) \le m} e^{k(\lambda)} & (n > m), \\ \displaystyle\coprod_{k(\lambda) \le m} e^{k(\lambda)} \cup e^n & (n \le m) \end{array} \right\} \supset X^m$$

を満たす．よって，$\tilde{\varphi}_\lambda(S^{n(\lambda)-1}) \subset X^{n(\lambda)-1} \subset (X \cup_\nu e^n)^{n(\lambda)-1}$.

包含写像 $\iota : V^n \to X \cup V^n$ と射影 $\pi : X \cup V^n \to X \cup_\nu e^n$ は連続だから，それらの合成 $\pi\iota : V^n \to X \cup_\nu e^n$ は連続である．また，$\pi\iota|E^n : E^n \to e^n := (\pi\iota)(E^n)$ は位相同型写像になる．よって，$\pi\iota$ は e^n の特性写像である．

$$(\pi\iota)(S^{n-1}) \subset X^{n-1} = (X \cup_\nu e^n)^{n-1}$$

だから，主張が成り立つ． □

問題 1.27. 有限 CW 複体 $X = e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_n}$ と $\varphi(S^{\lambda_{n+1}-1}) \subset X^{\lambda_m - 1}$ を満たす特性写像 $\varphi : e^{\lambda_{n+1}} \to X$ について，有限 CW 複体 $X \cup_\varphi e^{\lambda_{n+1}}$ は

$$X \cup_\varphi e^{\lambda_{n+1}} = e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_n} \cup e^{\lambda n+1}$$

を満たすことを示せ.

1.4 射影空間の胞体分割

この節では，実及び複素射影空間の胞体分割を行う.

n を自然数，$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ とする．$K^n - \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める：$x, y \in K^n - \{0\}$ に対して，

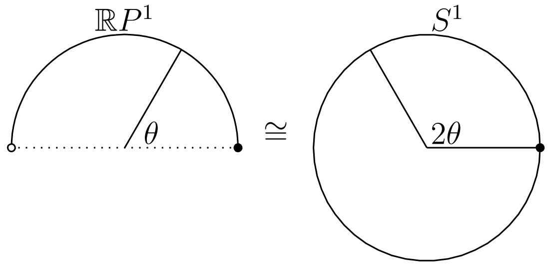
$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow y = x\lambda \text{となる } \lambda \in K \text{ が存在する} \\ &\Leftrightarrow y = x\lambda \text{となる } \lambda \in K - \{0\} \text{ が存在する} \end{aligned}$$

$KP^{n-1} = (K^n - \{0\})/\sim$ とおく．$\mathbb{R}P^{n-1}$ は実射影空間（問題 1.23），$\mathbb{C}P^{n-1}$ は複素射影空間 (例 1.24) である.

補題 1.66. 次の写像は位相同型写像である．

(1)

$$\mathbb{R}P^1 \to S^1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\};$$
$$[(x_1, x_2)] \mapsto \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$



(2)

$$\mathbb{C}P^1 \to S^2 = \left\{ (x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + |z|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\};$$
$$[(z_1, z_2)] \mapsto \left(\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right)$$

証明. $\mathbb{R}P^1, \mathbb{C}P^1$ は compact(問題 1.23, 例 1.24) で，S^1, S^2 は Hausdorff 空間だから，主張を示すためには，与えられた写像が連続な全単射であることを言えばよい (定理 1.10).

(1) $[(\cos\theta, \sin\theta)]$ の像は $(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin 2\theta)$．これより与えられた写像が連続な全単射であることがわかる．

(2)　与えられた写像は連続である．単射になることをまず示す．

$$\left(\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right) = \left(\frac{|w_1|^2}{|w_1|^2 + |w_2|^2}, \frac{w_1 \overline{w_2}}{|w_1|^2 + |w_2|^2} \right)$$

と仮定する．このとき，

$$\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \frac{|w_1|^2}{|w_1|^2 + |w_2|^2}, \quad \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \frac{w_1 \overline{w_2}}{|w_1|^2 + |w_2|^2}$$

$z_1 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 0$ が成り立つ．また，$z_2 = 0 \Leftrightarrow w_2 = 0$ も成り立つ．これらの場合に $[(z_1, z_2)] = [(w_1, w_2)]$ が成り立つことは明らかだから，以下，$z_1 z_2 w_1 w_2 \neq 0$ とする．このとき，

$$\frac{|w_1|^2 + |w_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \frac{|w_1|^2}{|z_1|^2} = \frac{w_1 \overline{w_2}}{z_1 \overline{z_2}}$$

これより，$w_1/z_1 = w_2/z_2$ となるので，$[(z_1, z_2)] = [(w_1, w_2)]$ が得られる．ゆえに，この写像は単射である．

全射を示すために $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + |z|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ を満たす $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ をとる．$|\alpha| = 1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して $\alpha z \in \mathbb{R}$．(1) より，$[(x_1, x_2)] \in \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$ が存在して，

$$(x, \alpha z) = \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

このとき，

$$(x, z) = \left(\frac{|x_1|^2}{|x_1|^2 + |\bar{\alpha} x_2|^2}, \frac{x_1 \bar{\alpha} x_2}{|x_1|^2 + |\bar{\alpha} x_2|^2} \right)$$

よって，全射が示された．

□

自然な包含 $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{K}^m \subset \mathbb{K}^{m+1}$ は自然な包含

$$KP^0 \subset KP^1 \subset \cdots \subset KP^{m-1} \subset KP^m$$

を誘導する．

補題 1.66 の結果と球面の胞体分割 (例 1.49) より，KP^1 の胞体分割は

$$\mathbb{R}P^1 = S^1 = e^0 \cup e^1, \qquad \mathbb{C}P^1 = S^2 = e^0 \cup e^2$$

これを一般次元の射影空間 KP^n に拡張することを考える．$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に応じて $d = 1, 2$ とおく．

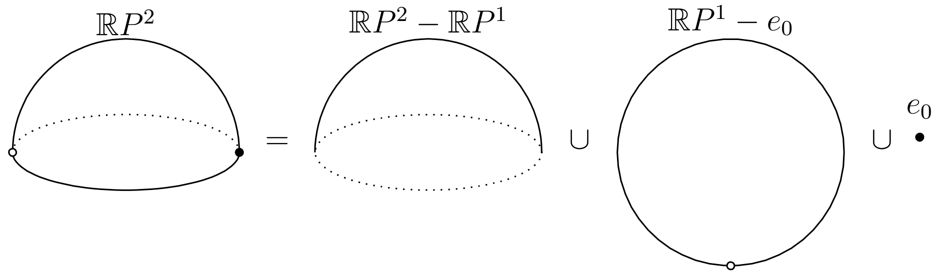
$$e^{dn} = KP^n - KP^{n-1}$$

とおく．明らかに

$$KP^n = e^0 \cup e^k \cup e^{2k} \cup \cdots \cup e^{nk} \quad (\text{互いに素}) \tag{1.11}$$

この分解が KP^n の胞体分割になることを示す：

定理 1.67. (1.11) は KP^n の胞体分割である．



証明．自然数 k に対し，

$$V_{K^k} = \{x \in K^k \mid |x| \le 1\} = \left\{ \begin{array}{ll} V^k & (K=\mathbb{R}) \\ V^{2k} & (K=\mathbb{C}) \end{array} \right\} = V^{dk},$$
$$E_{K^k} = \{x \in K^k \mid |x| < 1\} = E^{dk}$$

とおく．写像 $\varphi_k : V_{K^k} \to KP^k$ を

$$\varphi_k : V_{K^k} \to KP^k; x \mapsto \left[\begin{pmatrix} \sqrt{1-|x|^2} \\ x \end{pmatrix} \right]$$

と定める．このとき，φ_k は二つの連続写像

$$V_{K^k} \to K^{k+1} \to KP^k; x \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-|x|^2} \\ x \end{pmatrix} \mapsto \left[\begin{pmatrix} \sqrt{1-|x|^2} \\ x \end{pmatrix} \right]$$

の合成だから，連続である．さらに

$$\begin{aligned} &\varphi_k(x) = \varphi_k(y) \\ &\Leftrightarrow \lambda \in K - \{0\} \text{ が存在して } y = \lambda x, \sqrt{1-|y|^2} = \lambda\sqrt{1-|x|^2} \end{aligned}$$

ここで，$x \in E_{K^k}$ のときと，$x \in V_{K^k} - E_{K^k} = \partial V_{K^k}$ のときに場合分けする．$\in E_{K^k}$ のとき，$y = \frac{\sqrt{1-|y|^2|}}{\sqrt{1-|x|^2}}x$．両辺のノルムの二乗を計算し，$|x| = |y|$．先の式に代入し，$|x| = |y|$．$x \in \partial V_{K^k}$ のとき，$|x| = |y| = 1, y = \lambda x$．ゆえに，

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(y) \Leftrightarrow x = y \in E_{K^k} \text{ または } |x| = |y| = 1, y = \lambda x$$

特に，E_{K^k} 上で φ_k は単射である．また，$\varphi(E_{K^k}) = KP^k - KP^{k-1} = e^{kd}$. $\psi_k : e^{kd} \to E_{V^k}$ を

$$\psi_k : e^{kd} \to E_{V^k};\ \left[\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}\right] \mapsto \frac{|a|}{\sqrt{|a|^2+|y|^2}} \cdot \frac{y}{a}$$

と定めると，ψ_k は E_{V^k} 上で $\varphi_k : E_{V^k} \to e^{kd}$ の逆写像である．ψ_k は連続だから，$\varphi_k : E_{V^k} \to e^{kd}$ は位相同型写像である．よって，φ_k は e^{kd} の特性写像であり，$k \le n$ のとき e^{kd} は KP^n の kd 次元胞体である．

$$\varphi_k(V_{K^k} - E_{K^k}) = KP^{k-1} = \bigcup_{i \le k-1} e^{di}$$

だから，(1.11) は KP^n の胞体分割である． □

2 多様体

位相空間 M が m 次元の広がりをもつ場合に M を m 次元多様体という．m 次元多様体 M とは，大雑把に言えば M の各点 p の位置が（局所的には）m 個のパラメーター $(x_1, \cdots, x_m)$ を用いて $(x_1(p), \cdots, x_m(p))$ と表されることである．$(x_1, \cdots, x_m)$ は局所座標系と呼ばれる．局所座標系の取り方はいろいろあるが，2 つの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $(y_1, \cdots, y_m)$ は座標変換で結ばれる．曲線は 1 次元多様体であり，曲面は 2 次元多様体である．パラメーターの取り方によらない性質を調べる学問が多様体の幾何学である．

2.1 多様体 と境界付き多様体

定義 2.1. 位相空間 X の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への同相写像 $\varphi : U \to V$ が存在するとき，組 (U, φ) を m 次元**座標近傍**といい，φ を U 上の**局所座標系**という．

局所座標系 φ は，$\varphi(p) \in V \subset \mathbb{R}^m$ を満たすから，

$$\varphi(p) = (x_1(p), \cdots, x_m(p)) \qquad (p \in U)$$

と表示され，各 $x_i : U \to \mathbb{R}$ は連続関数になる．

座標近傍 (U, φ) を $(U; x_1, \cdots, x_m)$ や $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$ と書くこともある．

定義 2.2. Hausdorff 位相空間 M が m 次元**位相多様体**であるとは，各点 $x \in M$ に対し，x を含む m 次元座標近傍が存在するときをいう．

m 次元位相多様体 M に対し，m を M の次元といい，$m = \dim M$ と表す．

M を m 次元位相多様体とすると，M の開被覆 $\{U_\lambda\}$ で，$(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ が m 次元座標近傍となるものが存在する．

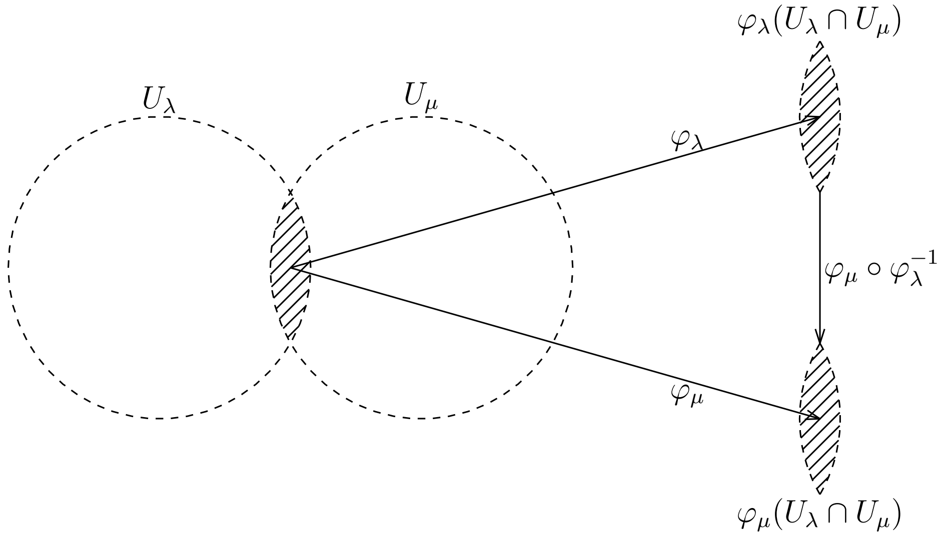
定義 2.3. Hausdorff 位相空間 M が m 次元 C^∞ 級**多様体**であるとは，M が次の条件 (1), (2) を満たすときをいう．

(1) M は m 次元の座標近傍 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ により，$M = \bigcup U_\lambda$ と被覆される．

(2) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき，$\mathbb{R}^m$ の開集合 $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ から $\mathbb{R}^m$ の開集合 $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ への写像

$$\varphi_{\mu\lambda} := \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^∞ 級写像である．($\varphi_{\mu\lambda}$ を**座標変換**という)



m 次元 C^∞ 級多様体は，m 次元位相多様体である．

問題 2.1. 座標変換 $\varphi_{\mu\lambda}$ は次を満たすことを示せ：

(1) $\varphi_{\lambda\lambda} = 1$

(2) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき，$\varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}$.

(3) $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$ のとき，$\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}$.

例 2.4. $\mathbb{R}^m$ は m 次元 C^∞ 級多様体である．実ベクトル空間としての自然な同一視 $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ により，$\mathbb{C}^m$ は $2m$ 次元 C^∞ 級多様体である．

例 2.5. m 次元 C^∞ 級多様体 M の開集合 U は m 次元 C^∞ 級多様体である．U を M の**開部分多様体**という．たとえば，実一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ と複素一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ はそれぞれ $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ と $M(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ の開部分多様体である．さらに，$GL(n, \mathbb{R})$ と $GL(n, \mathbb{C})$ はそれぞれ Lie 群になっている．

C^∞ 級多様体 G が同時に群であり，群演算 $G \times G \to G; (a, b) \mapsto ab$ と $G \to G; a \mapsto a^{-1}$ が C^∞ 級になるとき，G を **Lie 群**という．Lie 群は位相群である．

球面 S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内で一つの式 $\|x\|^2 = 1$ で縛られているので，$n(= n + 1 - 1)$ 次元多様体になる．

例 2.6. n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

証明. S^n の部分集合 U_i^+, U_i^- を

$$U_i^+ = S^n \cap \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i > 0\},$$
$$U_i^- = S^n \cap \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i < 0\}$$

と定めると，$U_i^\pm$ は S^n の開集合であり，$\{U_i^+, U_i^- \mid 1 \leq i \leq n+1\}$ は S^n の開被覆になる．$B = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$ とおくと，B は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to B; (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$$

は同相写像になる．$i < j$ とすると

$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0, x_j > 0\},$$
$$\varphi_i^+(U_i \cap U_j) = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in B \mid y_j > 0\},$$
$$\varphi_i^+(U_i \cap U_j) = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in B \mid y_j > 0\}$$

これらより

$$\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j);$$
$$(y_1, \cdots, y_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2}, y_{i+1}, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_n)$$

よって座標変換 $\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1}$ は C^∞ である．同様にして他の座標変換も C^∞ であることが示せる． □

例 2.7. m 次元 C^∞ 級多様体 M と n 次元 C^∞ 級多様体 N の積 $M \times N$ は $m+n$ 次元 C^∞ 級多様体になる．これを**積多様体**という．

例 2.8. [m 次元トーラス] S^1 の m 個の積 $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$ は m 次元 compact C^∞ 級多様体である．T^m を m 次元**トーラス**という．

次の二つの例は（少なくとも見かけ上は）Euclid 空間の部分集合ではない多様体の例である．

例 2.9. 実射影空間 $\mathbb{R}P^m$ は問題 1.23 の $\{(U_i, \varphi_i)\}$ を座標近傍とする m 次元 C^∞ 級多様体になる．

例 2.10. [複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$] 複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$ は compact 弧状連結 Hausdorff 空間である (例 1.24)．$\mathbb{C}P^m$ に多様体の構造を導入しよう．$U_i = \{z = (z_1, \cdots, z_{m+1}) \in S^{2m+1} \mid z_i \neq 0\}$ とおくと，$\{U_i \mid 1 \leq i \leq 2m+1\}$ は S^{2m+1} の開被覆になる．よって，$\{\pi(U_i) \mid 1 \leq i \leq 2m+1\}$ は $\mathbb{C}P^m$ の開被覆になる．写像

$$\varphi_i : \pi(U_i) \to \mathbb{C}^m;$$
$$[(z_1, \cdots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \cdots, z_{m+1})] \mapsto \left[\left(\frac{z_1}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_{m+1}}{z_i}\right)\right]$$

は位相同型写像である．$\{(\pi(U_i), \varphi_i) \mid 1 \leq i \leq m+1\}$ を座標近傍として，$\mathbb{C}P^m$ は compact C^∞ 級 $2m$ 次元多様体になる．

次に境界付き多様体を定義しよう．そのために

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$$

とおき，$\mathbb{H}^m$ に $\mathbb{R}^m$ の位相から誘導される相対位相を入れておく．このとき，$\mathbb{H}^m$ の境界 $\partial\mathbb{H}^m$ は,

$$\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \cdots, x_{m-1}, 0) \in \mathbb{R}^m \mid x_1, \cdots, x_{m-1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{m-1}$$

定義 2.11. 位相空間 X の開集合 U から $\mathbb{H}^m$ または $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への位相同型写像 $\varphi : U \to V$ が存在するとき，組 (U, φ) を**境界付き m 次元座標近傍**といい，φ を U 上の**境界付き座標系**という．

定義 2.12. Hausdorff 位相空間 M が**境界付き m 次元位相多様体**であるとは，各点 $x \in M$ に対し，x を含む境界付き m 次元座標近傍が存在するときをいう．

定義 2.13. U, V を $\mathbb{H}^m$ の二つの開集合とする．写像 $f : U \to V$ が C^∞ **級**であるとは，U, V それぞれを含む $\mathbb{R}^m$ の開集合 U', V' と f の拡張 $F : U' \to V'$ が存在して，F が C^∞ 級になるときをいう．

$f : U \to V$ が微分同型写像であるとは，f が全単射であり，f と $f^{-1} : V \to U$ が共に C^∞ 級であるときをいう．

定義 2.14. Hausdorff 空間 M が**境界付き m 次元 C^∞ 級多様体**であるとは，M が次の条件 (1), (2) を満たすときをいう：

(1) M は境界付き m 次元座標近傍 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ により，$M = \bigcup U_\lambda$ と被覆される．

(2) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき，$\mathbb{H}^m$ または $\mathbb{R}^m$ の開集合 $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ から $\mathbb{H}^m$ または $\mathbb{R}^m$ の開集合 $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ への写像

$$\varphi_{\mu\lambda} := \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^∞ 級写像である．($\varphi_{\mu\lambda}$ を**座標変換**という)

上のとき，境界付き m 次元 C^∞ 級多様体 M の境界 $\mathrm{Bd}(M)$ を

$$\mathrm{Bd}(M) := \{x \in M \mid x \in U_\lambda, \varphi_\lambda(x) \in \partial\mathbb{H}^m \quad (\exists\lambda)\}$$

と定める．$\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$ のとき，M は定義 2.3 の意味で m 次元 C^∞ 級多様体になる．

例 2.15. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 M を

$$M = ((0,1) \times (0,1)) \cup ((0,1) \times \{0\}) = (0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2$ の部分空間 M の位相的な境界 ∂M は正方形の周

$$\partial M = (0,1] \times \{0,1\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])$$

となる．

M は $\mathbb{H}^2$ の開集合である．$\iota : M \to \mathbb{H}^2$ で包含写像を表すと，ι は単射連続写像である．恒等写像 $1_M : M \to M$ は位相同型写像であり，座標変換 $1_{MM} = 1_M$ は C^∞ 級だから，M は境界付き 2 次元多様体である．境界付き多様体 M の境界 $\mathrm{Bd}(M) = (0,1) \times \{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合なので，1 次元多様体であり，$M - \mathrm{Bd}(M) = (0,1) \times (0,1)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合なので，2 次元 C^∞ 級多様体である．

M を境界付き m 次元 C^∞ 級多様体とする．

$$M - \mathrm{Bd}(M) := \{x \in M \mid x \in U_\lambda, \varphi_\lambda(x) \notin \partial\mathbb{H}^m \quad (\forall\lambda)\}$$

は M の開集合であり，定義 2.3 の意味で m 次元 C^∞ 級多様体である．以下，定義中の記号をそのまま用いる．$\{U_\lambda\}$ は M の開被覆だから，$\{U_\lambda \cap \mathrm{Bd}(M)\}$ は $\mathrm{Bd}(M)$ の開被覆である．$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は位相同型写像だから，

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \cap \mathrm{Bd}(M) \to \varphi(U_\lambda) \cap \partial\mathrm{H}^m$$

も位相同型写像である．$\varphi(U_\lambda)$ は $\mathbb{H}^m$ の開集合だから，$\mathbb{R}^m$ の開集合 V_λ が存在して，$\varphi_\lambda(U_\lambda) = V_\lambda \cap \mathbb{H}^m$．このとき，

$$\varphi_\lambda(U_\lambda) \cap \partial\mathbb{H}^m = V_\lambda \cap \mathbb{H}^m \cap \partial\mathbb{H}^m = V_\lambda \cap \partial\mathbb{H}^m$$

よって，$\varphi_\lambda(U_\lambda) \cap \partial\mathbb{H}^m$ は $\partial\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}$ の開集合である．座標変換 $\varphi_{\mu\lambda} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級だから，$\varphi_{\mu\lambda} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu \cap \mathrm{Bd}(M)) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu \cap \mathrm{Bd}(M))$ も C^∞ 級である．よって，$\mathrm{Bd}(M)$ は定義 2.3 の意味で $m-1$ 次元 C^∞ 級多様体である．

2.2　方向微分と接空間

ベクトル解析では，空間内の曲線や曲面の接ベクトルや接平面を学んだ．また，与えられた方向に関する関数の方向微分についても学んだ．この節では，これらの概念を多様体上に一般化する．

M, N をそれぞれ m 次元，n 次元 C^∞ 級多様体とする．写像 $f : M \to N$ が C^r 級 $(r = 1, 2, \cdots, \infty)$ を連続とすると，各点 $p \in M$ に対し，p と $f(p)$ のそれぞれの座標近傍 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ と $(V, y_1, \cdots, y_n)$ を $f(U) \subset V$ ととれる．

定義 2.16. 連続写像 $f : M \to N$ が C^r 級であるとは，$f|U : U \to V$ の座標表示

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, y_n = f_n(x_1, \cdots, x_m)$$

がすべて C^r 級のときをいう．この定義は $f(U) \subset V$ を満たす座標近傍 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ と $(V, y_1, \cdots, y_n)$ の取り方によらない．

問題 2.2. L, M, N を C^∞ 級多様体とする．2 つの写像 $f : L \to M, g : M \to N$ が C^∞ 級ならば，合成写像 $g \circ f : L \to N$ も C^∞ 級であることを示せ．

曲線や曲面の各点に接線や接平面が引けるように，多様体の各点には接空間が定義される．

M を m 次元 C^∞ 級多様体とする．点 $p \in M$ における**方向微分** v とは，写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ で

(1) $v(af + bg) = av(f) + bv(g) \qquad (f, g \in C^\infty(M), a, b \in \mathbb{R})$

(2) [ライプニッツ則] $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g) \qquad (f, g \in C^\infty(M))$

を満たすものをいう．点 $p \in M$ における方向微分の全体 $T_p(M)$ は $\mathbb{R}$-上ベクトル空間になる．p における座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ をとれば，$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p(M)$ となる．

問題 2.3. $v \in T_p(M)$ とする．次を示せ．

(1) 定数関数 c に対し，$v(c) = 0$.

(2) $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}$ は，$\mathbb{R}$ 上線形独立である．

(3) $w = \sum_{i=1}^m v(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p(M)$ とおく．$x_1, \cdots, x_m$ を変数とする多項式環 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 上で，$v = w$ が成り立つ．

(4) $g \in C^\infty(U)$ に対し，$v(g(x_1, \cdots, x_m)(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))) = 0$.

命題 2.17. p のまわりの座標近傍 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ をとれば，

$$T_p(M) = \sum_{i=1}^m \mathbb{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \tag{2.12}$$

特に，$\dim T_p(M) = \dim M$.

証明．(2.12) の右辺が $T_p(M)$ の m 次元部分空間であることは問題 2.3, (2) による．

$v \in T_p(M)$ とする．任意の $f \in C^\infty(U)$ に対し，$g_{ij} \in C^\infty(U)$ が存在して，

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_m) =& f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - x_j(p)) \\ &+ \sum g_{ij}(x_1, \cdots, x_m)(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p)) \end{aligned}$$

問題 2.3, (1) より，定数 $f(p)$ について $v(f(p)) = 0$．問題 2.3, (4) より，$v(g_{ij}(x_1, \cdots, x_m)(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))) = 0$ だから，

$$v(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) v(x_j) = \left(\sum v(x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) f$$

よって，$v = \sum v(x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \in \sum_{i=1}^m \mathbb{R} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$． □

p を通る C^∞ 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M, c(0) = p$ を

$$c(t) = (x_1(t), \cdots, x_m(t))$$

と表示する．U で定義された C^∞ 級関数 φ に対し，

$$\frac{d}{dt}\varphi(c(t))|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \varphi$$

よって，次が成り立つ．

命題 2.18. M を C^∞ 級多様体とする．任意の $v \in T_p(M)$ に対し，C^∞ 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が存在して，$c(0) = p$, $v = \frac{dc}{dt}|_{t=0}$ すなわち，

$$v(\varphi) = \frac{d\varphi(c(t))}{dt}|_{t=0} \qquad (\varphi \in C^\infty(U)) \tag{2.13}$$

が成り立つ．

等式 (2.13) を簡単に

$$v = \frac{dc(t)}{dt}|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \in T_p(M)$$

と表す（これは方向微分としての等式である）．$T_p(M)$ の元を p における**接ベクトル**ともいう．

2.3 写像とその微分

M, N をそれぞれ m 次元，n 次元の C^∞ 級多様体，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．$p \in M$ を通る C^∞ 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M, c(0)$ に対し，$\frac{dc(t)}{dt}|_{t=0} \in T_p(M), \frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} \in T_{f(p)}(N)$ である．$p, f(p)$ のまわりの座標近傍 $(U, x_1, \cdots, x_m), (V, y_1, \cdots, y_n)$ を $f(U) \subset V$ ととる．$c(t) = (x_1(t), \cdots, x_m(t))$,

$$(y_1, \cdots, y_n) = f(c(t)) = (f_1(x_1(t), \cdots, x_m(t)), \cdots, f_n(x_1(t), \cdots, x_m(t)))$$

と表示すると，

$$\begin{aligned}\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{df_j}{dt}|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(p) \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}\end{aligned}$$

よって，$v = \frac{c(t)}{dt}|_{t=0} \in T_p(M)$ に $\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} \in T_{f(p)}(N)$ を対応させる写像 $(df)_p$ は線形であり，

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N); \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)} \tag{2.14}$$

$(df)_p \in \mathrm{Hom}(T_p(M), T_{f(p)}(N))$ を f の p における**微分**という．$T_p(M)$ の基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}$ と $T_{f(p)}(N)$ の基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p\right\}$ に関する $(df)_p$ の表現行列は

$$(Jf)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \tag{2.15}$$

$(Jf)_p$ を f の点 p における **Jacobi 行列**という．

例 2.19. C^∞ 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対し，

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(\mathbb{R}); \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{f(p)}$$

線形同型写像 $\mathbb{R} \to T_{f(p)}(\mathbb{R}); a \mapsto a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{f(p)}$ により，$\mathbb{R}$ と $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ を同一視すると，

$$(df)_p : T_p(M) \to \mathbb{R}; \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \tag{2.16}$$

問題 2.4. 2 つの C^∞ 級関数 $f, g : M \to \mathbb{R}$ に対し,

$$d(fg)_p = f(p)(dg)_p + g(p)(df)_p \in \mathrm{Hom}(T_p(M), \mathbb{R}) \tag{2.17}$$

が成り立つことを示せ.

例 2.20. $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$ $(m \geq n)$ とする. C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$$

と定める. すなわち,

$$\begin{aligned}(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots, x_m) &= (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= (x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

この f について $(Jf)_p = (E_n\ O_{n,m-n})$. 言い換えると

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} = (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \qquad (1 \leq i \leq n)$$

特に, 各 p に対し, $(df)_p$ は全射である.

2.4 ベクトル場と Riemann 計量

空間の各点 p にその点を始点とするベクトル X_p が指定されているとき, 対応 $X : p \mapsto X_p$ をベクトル場という. 電場や磁場や重力場はベクトル場の例である. 空間内の曲線の各点における接ベクトルが, その点における電場と一致しているとき, その曲線を電気力線といった. 磁力線も同様に定義される. これらはベクトル場の積分曲線として一般化される. すなわち, 曲線 $c(t)$ がベクトル場 X の積分曲線であるとは, 各点 $c(t)$ の速度ベクトル $\dot{c}(t)$ が X の $c(t)$ における値に一致する場合である: $X_{c(t)} = \dot{c}(t)$. この節では, これらについて学ぶ.

定義 2.21. M を C^∞ 級多様体とする. 対応 $X : p \mapsto X_p$ $(X_p \in T_p(M))$ を**ベクトル場**という. ベクトル場 X が C^∞ 級であるとは, 任意の C^∞ 級関数 f について, 関数 $p \mapsto (Xf)_p = X_p f$ が C^∞ 級になるときをいう.

定義 2.22. X を C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場とする. C^∞ 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が X の**積分曲線**であるとは, 任意の $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ に対し,

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)} \in T_{c(t)}(M)$$

が成り立つときをいう.

正規形の常微分方程式の解の存在と一意性から次が従う．

命題 2.23. X を C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．任意の $p \in M$ に対し，$\epsilon > 0$ と X の積分曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で $c(0) = p$ となるのものが存在する．c は p と $\epsilon > 0$ を決めれば一意に定まる．

定義 2.24. M を C^∞ 級多様体とする．各実数 $t \in \mathbb{R}$ に微分同型写像 $\varphi_t : M \to M$ が対応していて，次の (1)∼(4) が成り立つとき，$\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を M の **1 径数変換群**という：

(1) $\varphi_0 = 1_M$

(2) $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

(3) $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$

(4) $\mathbb{R} \times M \to M; (t, p) \mapsto \varphi_t(p)$ は C^∞ 級写像である．

1 径数変換群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対し，M 上の C^∞ 級ベクトル場 X を

$$X_p = \frac{d}{dt}\varphi_t(p)_{|t=0} \in T_p(M) \tag{2.18}$$

と定義できる．このとき，曲線 $c(t) : t \mapsto \varphi_t(p)$ は X の積分曲線である．

定義 2.25. c^∞ 級ベクトル場 X が**完備**であるとは，1 径数変換群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して，(2.18) が成り立つ場合をいう．

定理 2.26. compact C^∞ 級多様体の任意の C^∞ 級ベクトル場は完備である．

次で定義する Riemann 計量を導入することにより，接ベクトルの長さや，二つの接ベクトルのなす角が計れるようになる．また，曲線の長さも定義できるようになる．

定義 2.27. M を C^∞ 級多様体とする．各点 $p \in M$ の接空間 $T_p(M)$ が内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ をもつとする．任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対し，M 上の関数 $M \to \mathbb{R}; p \mapsto \langle X, Y\rangle_p := \langle X_p, Y_p\rangle_p$ が C^∞ 級になるとき，対応 $p \mapsto \langle\ ,\ \rangle_p$ を M 上の **Riemann 計量**という．Riemann 計量をもつ C^∞ 級多様体を **Riemann 多様体**といい，$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と表す．

例 2.28. $\mathbb{R}^n$ の標準座標系を $\{(x_1, \cdots, x_n)\}$ と表す.

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \delta_{ij}$$

により, $\mathbb{R}^n$ の Riemann 計量が定まる. これを $\mathbb{R}^n$ の**標準 Riemann 計量**という.

定義 2.29. $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を Riemann 多様体とする. M 上の C^∞ 級関数 f に対し, M 上のベクトル場 grad f を

$$\langle \mathrm{grad}\ f, X \rangle = df(X) = Xf \qquad (X\colon\ C^\infty \text{ 級ベクトル場}) \tag{2.19}$$

と定め, f の**勾配ベクトル場**という.

問題 2.5. 標準 Riemann 計量をもつ $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数 f について,

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

となることを示せ. (この結果はベクトル解析で学んだ結果と一致する)

与えられた多様体がいつ Riemann 計量をもつかは問題となるが, これについては次が知られている.

定理 2.30. σ compact C^∞ 級多様体は Riemann 計量をもつ.

証明は省略するが, 証明のポイントは次の二つである.
(i) σ compact C^∞ 級多様体は 1 の分割ができる.
(ii) 有限次元実線形空間 V 上の二つの内積 $\langle\ ,\rangle_1, \langle\ ,\rangle_2$ と正の数 a, b に対し, $\langle\ ,\ \rangle = a\langle\ ,\rangle_1 + b\langle\ ,\rangle_2$ も V 上の内積である.

2.5 はめ込みと埋め込み

はじめに, この節で用いる事実を復習しておく.

定理 2.31. [5, p. 121, 定理 10.3] M, N を C^∞ 級多様体, $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p \in \mathrm{Hom}(T_p(M), T_{f(p)}(N))$ が上への写像ならば, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と, $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ を適切に選んで, f の局所座標表示

$$(y_1, \cdots, y_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

を

$$
\begin{aligned}
&y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-n+1}, \quad y_2 = f_2(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-n+2}, \cdots, \\
&y_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-1}, \quad y_n = f_n(x_1, \cdots, x_m) = x_m
\end{aligned}
$$

とできる．

$N = \mathbb{R}$ の場合に，上の定理を適用して，次が得られる．

系 2.32. M を C^∞ 級多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする．ある点 $p \in M$ で $(df)_p \neq 0$ ならば，p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ を適切に選んで，f の局所座標表示を

$$
x_m = f(x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m)
$$

とできる．

定理 2.33. M, N をそれぞれ m 次元と n 次元の C^∞ 級多様体とする．点 $p \in M$ に対し，$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が単射ならば，p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ に対し，$f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで，f の局所座標表示が

$$
\begin{aligned}
&y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_m) = x_1, \\
&\quad \vdots \\
&y_m = f_m(x_1, \cdots, x_m) = x_m, \\
&y_{m+1} = f_{m+1}(x_1, \cdots, x_m) = 0, \\
&\quad \vdots \\
&y_n = f_n(x_1, \cdots, x_m) = 0
\end{aligned}
$$

を満たすようにできる．

定義 2.34. M, N をそれぞれ m 次元，n 次元 C^∞ 級多様体，$f : M \to N$ を C^r 級写像 $(r = 1, 2, \cdots, \infty)$ とする．任意の点 $x \in M$ に対し，$(df)_x \in \mathrm{Hom}(T_x(M), T_{f(x)}(N))$ が単射のとき，$f : M \to N$ を**はめ込み**という．

M, N を C^∞ 級多様体とする．はめ込み $f :\to N$ が存在すれば，

$$
m = \dim M = \dim T_x(M) \leq \dim T_{f(x)}(N) = \dim N = n
$$

$f : M \to N$ がはめ込みのとき，$T_x(M)$ と $(df)_x T_x(M)$ を同一視することにより，$T_x(M)$ を $T_{f(x)}(N)$ の部分空間とみなせる．

問題 2.6. $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を Riemann 多様体，$f : N \to M$ をはめ込みとする．$T_x(N)$ の内積 $(\ ,\ )_x$ を

$$(u, v)_x = \langle (df)_x u, (df)_x v \rangle \qquad (u, v \in T_x(N))$$

と定めることにより，$(\ ,\ )$ は N 上の Riemann 計量になることを示せ．このように定めた N 上の Riemann 計量 $(\ ,\ )$ を f による**誘導 Riemann 計量**という．

以下のいくつかの例では，Euclid 空間内の曲線や曲面の接線や接空間を Euclid 空間の部分空間と見て，その結果がベクトル解析で学んだ接線や接空間と一致していることを確かめている．

例 2.35. [曲線] $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) から $\mathbb{R}^n$ への C^∞ 級写像

$$c(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

に対し，

$$(dc)_p \left(\frac{d}{dt}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = c'(p)$$

だから，c がはめ込みになるための必要十分条件は各点 t で $c'(t) \neq 0$ となることである．このとき，誘導 Riemann 計量に関して，

$$\left\| \left(\frac{d}{dt}\right)_p \right\|^2 = \left\| (dc)_p \left(\frac{d}{dt}\right)_p \right\|^2 = \|\dot{c}(t)\|^2$$

正確には写像 $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ を曲線と呼ぶべきであるが，しばしば像 $c(a, b) \subset \mathbb{R}^n$ を曲線ということもある．$a < \alpha < \beta < b$ に対し，曲線 $c : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ の長さ l は

$$l = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる．t が c の弧長パラメーターであるとは，$\|\dot{c}(t)\| = 1$ となるときを言う．言い換えると，誘導 Riemann 計量に関して，$\left\| \left(\frac{d}{dt}\right)_p \right\| = 1$ が成り立つ場合である．

例 2.36. [グラフ状超曲面] D を $\mathbb{R}^m$ の開集合 $\varphi : D \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$f : D \to \mathbb{R}^{m+1}; (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, \varphi(x_1, \cdots, x_m))$ を考える．

$$(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{f(p)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}\right)_{f(p)} = e_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)e_{m+1}$$

だから，f ははめ込みである．誘導 Riemann 計量に関して

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \right\rangle = \delta_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p),$$

正確には写像 $f : D \to \mathbb{R}^{m+1}$ をグラフ状超曲面と呼ぶべきであるが，しばしば像 $f(D)$ をグラフ状超曲面ということもある．

例 2.37. 包含写像 $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ははめ込みである．

証明. 例 2.6 で述べた座標近傍 $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ を用いると，たとえば U_{n+1}^+ 上で

$$\iota|U_{n+1}^+ : U_{n+1}^+ \to \mathbb{R}^{n+1}; x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

他の座標近傍上でも同様に表示することにより，ι が C^∞ 級であることが示せる．$i = 1, \cdots, n$ に対し，

$$\begin{aligned}(d\iota)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\iota(p)} - \frac{x_i(p)}{\sqrt{1 - \|x\|^2(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)_{\iota(p)} \\ &= e_i - \frac{x_i(p)}{\sqrt{1 - \|x\|^2(p)}}e_{n+1} \in T_{\iota(p)}(\mathbb{R}^{n+1})\end{aligned}$$

だから，$(d\iota)_p$ は単射である．ゆえに，ι ははめ込みになる．$(d\iota)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} x_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\iota(p)} = \sum_{j=1}^{n+1} x_j(p)e_j$ との標準内積を計算すると，

$$\left\langle (d\iota)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \sum_{j=1}^{n+1} x_j(p)e_j \right\rangle = x_i(p) - \frac{x_{n+1}(p)}{\sqrt{1 - \|x\|^2(p)}}x_i(p) = 0$$

となるから，$p = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} x_j(p)e_j$ と同一視すると，

$$(d\iota)_pT_p(S^n) = \{u \in T_{\iota(p)}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid \langle u, p\rangle = 0\}$$

□

補題 2.38. M, N を C^∞ 級多様体，$f : M \to N$ をはめ込みとする．$\dim M = \dim N$ ならば，$f(M)$ は N の開集合である．

証明. • 任意の $p \in M$ に対し，$(df)_p \in \mathrm{Hom}(T_p(M), T_{f(p)}(N))$ は単射で，

$$\dim T_p(M) = \dim M = \dim N = \dim T_{f(p)}(N)$$

だから，$(df)_p$ は線形同型写像である．逆関数定理により，$p, f(p)$ それぞれの M, N における近傍 U, V で $f|U : U \to V$ が微分同型写像になるものが存在する．特に，$V = f(U)$．(証明の本質はここで終わっている)

• 以上を用いて主張を示す．任意の $q \in f(M)$ に対し，$p \in M$ が存在して，$q = f(p)$．上の V は q の N における開近傍で $V \subset f(M)$．よって，$f(M)$ は開集合である． $\square$

定義 2.39. M, N を C^∞ 級多様体とする．はめ込み $f : M \to N$ が**埋め込み**であるとは $f(M)$ に相対位相を入れるとき，$f : M \to f(M)$ が同相写像になるときをいう．

例 2.40. $m \leq n$ とする．包含写像

$$\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$$

は埋め込みである．

例 2.41. S^n の位相は $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の相対位相を考えているので，例 2.37 のはめ込み $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ は埋め込みである．

m 次元 compact C^∞ 級多様体 M は必ず高い次元の Euclid 空間に埋め込める．このことを示そう．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を M の座標近傍系とする．$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は M の開被覆で，M は compact だから，有限開被覆 $\{U_i := U_{\alpha_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ が選べる．この $\{U_i\}$ に対し，1 の分割が存在する：C^∞ 級関数 $f_i : M \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在して，次の (i) から (iii) を満たす．

(i) $0 \leq f_i \leq 1$

(ii) $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$

このとき，次が成り立つ．

命題 2.42. C^∞ 級写像 $F : M \to \mathbb{R}^{(m+1)n}$ を

$$F = (f_1, \cdots, f_n, f_1\varphi_1, \cdots, f_n\varphi_n)$$

と定めると，F は埋め込みである．

証明. まず，F が単射になることを示す．$F(p) = F(q)$ と仮定すると，

$$f_i(p) = f_i(q), \quad f_i(p)\varphi_i(p) = f_i(q)\varphi_i(q) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

(i), (iii) より，ある i が存在して，$0 < f_i(p) = f_i(q)$．この i について，$\varphi_i(p) = \varphi_i(q)$．$\varphi_i$ は単射だから，$p = q$．ゆえに，F は単射である．

M は compact で $F(M)$ は Hausdorff，$F : M \to F(M)$ は連続だから，$F : M \to F(M)$ は位相同型写像である（命題 1.11）.

最後に F がはめ込みになることを示せば，上に述べたことから，F は埋め込みになる．$X \in T_p(M)$ について $(dF)_p(X) = 0$ と仮定すると，$i = 1, \cdots, n$ について，$(df_i)_p(X) = 0, f_i(p)(d\varphi_i)_p(X) = 0$．ある i について，$0 < f_i(p)$ だから，この i について，$(d\varphi_i)_p(X) = 0$．ゆえに，$X = 0$ となり，$(dF)_p$ は単射である．よって，F ははめ込みになる． □

上の命題より強く次の定理が成り立つことが知られている．

定理 2.43. [Whitney] σ compact m 次元 C^∞ 級多様体 M に対し，C^∞ 級埋め込み $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ で，像 $f(M)$ が $\mathbb{R}^{2m+1}$ の閉集合であるようなものが存在する．

証明については，[4] を参照.

問題 2.7. Whitney の定理 (定理 2.43) と問題 2.6 の結果を用いて，σ compact C^∞ 級多様体には Riemann 計量が存在することを示せ.

$f : M \to N$ がはめ込みならば, M の任意の開集合 U に対し，$f : U \to N$ もはめ込みである．定理 2.31 より，はめ込みは局所的には埋め込みである．

埋め込み $f : M \to N$ は単射でなければならない．はめ込み f が単射であっても，埋め込みとは限らない.

例 2.44. 定数 α に対し，C^∞ 級写像

$$c : \mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1,$$
$$t \mapsto ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\alpha\pi t, \sin 2\alpha\pi t)) = ((x_1, y_2), (x_2, y_2))$$

を考える．

$$c(t_1)=c(t_2)\Leftrightarrow t_2-t_1,\alpha(t_2-t_1)\in\mathbb{Z}$$

だから，c：単射 $\Leftrightarrow$ α：無理数となる．以下，α を無理数とする．S^1 の開集合を

$$\begin{aligned}U_1^+&=\{(x,y)\in S^1\mid x>0\},\quad U_1^-=\{(x,y)\in S^1\mid x<0\},\\U_2^+&=\{(x,y)\in S^1\mid y>0\},\quad U_2^-=\{(x,y)\in S^1\mid y<0\}\end{aligned}$$

と定めると，$\{U_i^\pm\times U_j^\pm\mid i,j=1,2\}$ は T^2 の開被覆になる．たとえば，$U_2^+\times U_2^+$ 上で (x_1,x_2) は T^2 の局所座標系であり，

$$(dc)\left(\frac{d}{dt}\right)=-2\pi\left(\sin(2\pi t)(\frac{\partial}{\partial x_1})+\alpha\sin(2\pi\alpha t)(\frac{\partial}{\partial x_2})\right)$$

α は無理数だから，$U_2^+\times U_2^+$ 上で $dc\neq 0$．同様に，$\mathbb{R}$ の各点で $dc\neq 0$．よって，c は単射なはめ込みになる．

$c(\mathbb{R})$ に T^2 の相対位相を入れたものと同一視 $c(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ により，$\mathbb{R}$ の位相を $c(\mathbb{R})$ に移して考えたものは異なり，c は埋め込みではない（[5, p. 157] を参照）．

2.6 部分多様体

空間内の曲線や曲面は空間内の住人にとっては目で見ることができる．これまでに n 次元球面 S^n や一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ が C^∞ 級多様体になることを学んだ．S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合であり，$GL(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の部分集合であるので，これらの多様体は外側の $\mathbb{R}^{n+1}$ や $\mathbb{R}^{n^2}$ から眺めることができる．S^n と $GL(n,\mathbb{R})$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{n+1}$ と $\mathbb{R}^{n^2}$ の「部分多様体」となっている．

n 次元 C^∞ 級多様体 N の開集合を N の n 次元 C^∞ 級部分多様体という．N の n 次元 C^∞ 級部分多様体はそれ自身 n 次元 C^∞ 級多様体である．

定義 2.45. N を n 次元 C^∞ 級多様体，$0\leq l<n$ とする．部分集合 $L\subset N$ が N の l 次元 C^∞ 級**部分多様体**であるとは，任意の点 $p\in L$ に対して，p を含む N の座標近傍 $(U;x_1,\cdots,x_n)$ が存在して，

$$L\cap U=\{(x_1,\cdots,x_n)\in U\mid x_{l+1}=\cdots=x_n=0\}$$

となるときをいう．

定理 2.46. N を C^∞ 級多様体とし，部分空間 $L \subset N$ を考える．L が N の部分多様体になるための必要十分条件は，L は C^∞ 級多様体で，包含写像が埋め込みになることである．

証明. ($\Rightarrow$) L に N からの誘導位相を入れると，N が Hausdorff だから L も Hausdorff になる．任意の点 $p \in L$ に対し，p を含む N の座標近傍系 $(U_p, x_1^p, \cdots, x_n^p)$ で定義 2.45 の条件を満たすものをとる．このとき，$V_p = L \cap U_p$ とおくと，$\{V_p \mid p \in L\}$ は L の開被覆になる．$V_p \cap V_q \neq \emptyset$ と仮定すると，$U_p \cap U_q \neq \emptyset$．$U_p \cap U_q$ の座標変換 $x_j^q = f_j(x_1^p, \cdots, x_n^p)$ は C^∞ である．$V_p \cap V_q$ 上では,$x_{l+1}^p = \cdots = x_n^p = 0$, $x_{l+1}^q = \cdots = x_n^q = 0$ だから，$V_p \cap V_q$ 上で

$$\begin{aligned}
x_1^q &= f_1(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0),\\
&\ \vdots\\
x_l^q &= f_l(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0),\\
0 &= f_{l+1}(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0),\\
&\ \vdots\\
0 &= f_n(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$g_j(x_1^p, \cdots, x_l^p) = f_j(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0)$ とおくと，g_j は C^∞ であり，$V_p \cap V_q$ の座標変換を与える．よって，N は C^∞ 級多様体である．包含写像 ι を上で定めた局所座標系で表すと，$\iota(x_1, \cdots, x_l) = (x_1, \cdots, x_l, 0, \cdots, 0)$．これより，$(d\iota)_p(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ が得られるので ι は，はめ込みである．L の位相は相対位相を与えているので，ι は埋め込みである．

($\Leftarrow$) は定理 2.33 から直ちに従う． □

問題 2.8. L を C^∞ 級多様体 N の部分多様体とする．C^∞ 級関数 $f : N \to \mathbb{R}$ に対し，$f|L : L \to \mathbb{R}$ も C^∞ 級であることを示せ．

M, N を C^∞ 級多様体，$m := \dim M \geq n := \dim N \geq 1$ とする．$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．M, N の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$, $(V; y_1, \cdots, y_n)$ を，$f(U) \subset V$ ととり，f を U 上で

$$f(x_1, \cdots x_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

と表示する．$q = (q_1, \cdots, q_n) \in V$ に対し，

$$f^{-1}(q) \cap U = \{(x_1, \cdots, x_m) \in U \mid f_i(x_1, \cdots, x_m) = q_i \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

は，m 個の変数 $x_1, \cdots, x_m$ を n 個の式 $f_i = q_i$ で束縛しているのだから，適切な設定をすれば，自由度が $m-n$ になり，$f^{-1}(q)$ は，M の $m-n$ 次元部分多様体になると推察される．ただし，このことは無条件では成り立たない．たとえば，$c \in \mathbb{R}$ に対し，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - c$ のとき，$f^{-1}(q)$ は自由度が $2-1=1$ なので，曲線になってほしいが，実際には

$$f^{-1}(0) = \begin{cases} \text{円}\, x^2 + y^2 = c & (c > 0), \\ \text{一点}\, \{(0,0)\} & (c = 0), \\ \emptyset & (c < 0) \end{cases}$$

となる．そこで上で述べた推察を正当化するために次の用語を定義する．

定義 2.47. M, N を C^∞ 級多様体，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像，$m := \dim M \geq n := \dim N \geq 1$ とする．$p \in M$ が f の**正則点**であるとは，$\mathrm{rank}((df)_p)(= \mathrm{rank}((Jf)_p)) = n$ となるときをいう．$q \in N$ が f の**正則値**であるとは，(1) $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ であり，任意の $p \in f^{-1}(q)$ に対し，p は f の正則点，または，(2) $f^{-1}(q) = \emptyset$ となるときをいう．

例 2.48. $f = (f_1, \cdots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ に対し，(2.15) より，p が f の正則点 $\Leftrightarrow \{(df_1)_p, \cdots, (df_n)_p\}$ が線形独立.

定理 2.49. M, N を C^∞ 級多様体，$m := \dim M \geq n := \dim N \geq 1$ とする．$q \in N$ が C^∞ 級写像 $f : M \to N$ の正則値で，$f^{-1}(q) \neq \emptyset$ とする．このとき，$f^{-1}(q)$ は M の $(m-n)$ 次元 C^∞ 級部分多様体である．

証明. q は正則値だから，任意の $p \in f^{-1}(q)$ は f の正則点である．定理 2.31 より，p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ と q のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ で $y_i(q) = 0$ かつ $f|U : U \to V$ は $(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots, x_m) = (x_{m-n+1}, \cdots, x_m)$ と表示されるものが存在する．このとき，

$$\begin{aligned} f^{-1}(q) \cap U &= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U \mid f(x_1, \cdots, x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_{m-n}, 0, \cdots, 0) \in U\} \end{aligned}$$

ゆえに主張が成り立つ． □

系 2.50. M を m 次元 C^∞ 級多様体とする．$a \in \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}$ の正則値で，$f^{-1}(a) \neq \emptyset$ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $f^{-1}(a)$ は M の $(m-1)$ 次元部分多様体である．

(2) $f^{-1}[a,\infty)$ は境界付き m 次元多様体であり，$\mathrm{Bd}(f^{-1}[a,\infty)) = f^{-1}(a)$.

証明. $p \in f^{-1}(a)$ のまわりの座標近傍で $(U; x_1, \cdots, x_m)$ で

$$f(x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m) = x_m$$

となるものが存在する．このとき，

(1) $f^{-1}(a) \cap U = \{(x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m) \mid x_m = a\} = \{x_1, \cdots, x_{m-1}, a) \in U\}$ となるので主張が成り立つ．

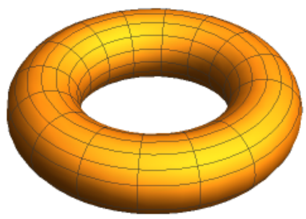
(2) $f^{-1}[a,\infty) \cap U = \{(x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m) \mid x_m \geq a\}$ であり，$f^{-1}(a,\infty)$ は M の開部分多様体だから，主張が成り立つ． □

問題 2.9. 次を示せ．r 個のベクトル $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{R}^n$ が線形独立になるための必要十分条件は $a_1, \cdots, a_r$ の **Gramm 行列** $(\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbb{R})$ が正則になることである．

上の問題の結果より

$$\begin{aligned} a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{R}^n \text{が線形独立} &\Leftrightarrow (\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbb{R}) \text{ が正則} \\ &\Leftrightarrow \textbf{Gramm 行列式 } |(\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq r}| \neq 0 \end{aligned}$$

例 2.51. [トーラス T^2] xy 平面内の点 $(0,2)$ を中心とする半径 1 の円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体は右のような**トーラス** T^2 になる．T^2 は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元 compact 部分多様体である．T^2 の式は



$$T^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2+3)^2 = 16(y^2+z^2)\}$$

証明. T^2 は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合だから，compact である (定理 1.16)．C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(y^2+z^2)$$

と定めると，$T = f^{-1}(0)$．Jacobi 行列 Jf は

$$Jf = (4x(x^2+y^2+z^2+3), 4y(x^2+y^2+z^2-8), 4z(x^2+y^2+z^2-8))$$

T^2 の各点で $Jf \neq 0$ を言えばよい．T^2 上で

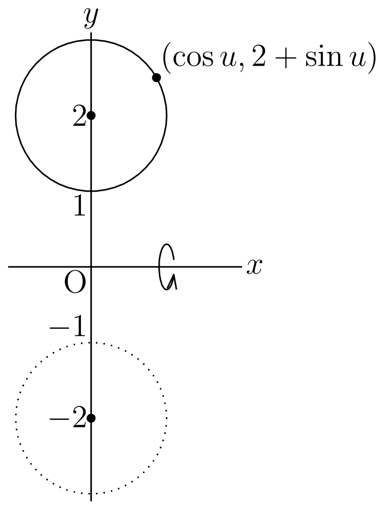
$$\begin{aligned}
&Jf = 0\\
&\Leftrightarrow x = 0, y(x^2+y^2+z^2-8) = z(x^2+y^2+z^2-8) = 0\\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \text{ または } x = 0, y^2+z^2 = 8\\
&\Leftrightarrow x = 0, y^2+z^2 = 8 \qquad ((0,0,0) \notin T^2)
\end{aligned}$$

$x = 0, y^2+z^2 = 8$ となる点は T^2 上の点ではないので，T^2 上で $Jf \neq 0$． □

[参考] T^2 のパラメーター表示は，

$$\begin{aligned}
&x(t,u) = \cos u,\\
&y(t,u) = \cos t(2+\sin u),\\
&z(t,u) = \sin t(2+\sin u)\\
&(0 \leq t, u \leq 2\pi)
\end{aligned}$$

で与えられる．



自然数 m, k は $(1 \leq)k \leq m$ を満たすとする．$\mathbb{R}^m$ 内の正規直交 k 枠の全体を $V_{m,k}$ とする．$V_{m,k}$ の元を表示するのに必要なパラメーターの数を調べてみよう．$V_{m,k}$ の元 A を $\mathbb{R}^m$ の列ベクトルを並べて $A = (a_1, \cdots, a_k)$ と表示すると，$\{a_1, \cdots, a_k\}$ は互いに直交する単位ベクトルである．単位ベクトル a_1 を指定するのに $m-1 = \dim S^{m-1}$ 個のパラメータが必要である．a_1 と直交する単位ベクトル a_2 を指定するのに $m-2$ 個のパラメーターが必要である．a_1, a_2 と直交する単位ベクトル a_3 を指定するのに $m-3$ 個のパラメーターが必要である．このように順に考えていくと $V_{m,k}$ の元を指定するのに $(m-1)+(m-2)+\cdots+(m-k) = mk - \frac{k(k+1)}{2}$ 個のパラメーターが必要である．

例 2.52. $V_{m,k}$ は $(mk - \frac{k(k+1)}{2})$ 次元 compact C^∞ 級多様体になる．$V_{m,k}$ を **Stiefel 多様体**という．

証明. $V_{m,k}$ は $M_{m,k}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{mk}$ の有界閉集合だから，compact である (定理 1.16)．$X = (x_1, \cdots, x_k) \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ とする．C^∞ 級関数 $f_{ij} : \mathbb{R}^{mk} \to \mathbb{R}$ を

$$f_{ij}(X) = \langle x_i, x_j \rangle - \delta_{ij}$$

と定めると，同一視 $M_{m,k}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{mk}$ により

$$V_{m,k} = \{X \in \mathbb{R}^{mk} \mid f_{ij}(X) = 0 \ (1 \leq i \leq j \leq k)\}$$

$x_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} x_{ki} e_k$ に対し，

$$\langle dx_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} (dx_{ki}) x_{kj} \tag{2.20}$$

等の記法を用いると，(2.17) より

$$(df_{ij})_X = \langle dx_i, x_j \rangle + \langle x_i, dx_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \{(dx_{ki}) x_{kj} + (dx_{kj}) x_{ki}\}$$

が得られる．$\langle dx_{ij}, dx_{kl} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ を用いると，$\underline{V_{m,k} \text{ 上で}}$

$$\langle (df_{ij})_X, (df_{pq})_X \rangle = 2(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) = \begin{cases} 4 & (i = j = p = q), \\ 2 & (i = p < j = q), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ゆえに，Gramm 行列は対角行列で，各対角成分は $\neq 0$．定理 2.49 より，主張が得られる． □

例 2.53. n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元 compact C^∞ 級部分多様体である．

証明. $S^n = V_{n+1,1}$ だから上の例より主張が成り立つ． □

問題 2.10. $\mathbb{R}^{2n}$ 自然に複素構造 J をもつ．任意の $p \in S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対し，$X_p = Jp$ とおくと，$p \mapsto X_p$ は S^{2n-1} 上のベクトル場になる．次を示せ．

(1) X は C^∞ 級ベクトル場である．

(2) 任意の $p \in S^{2n-1}$ に対し，$\|X_p\| = 1$.

例 2.54. 直交群 $O(n)$ と特殊直交群 $SO(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元 compact 部分多様体である．$\iota : O(n) \to M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ で包含写像を表すと．

$$(d\iota)_A(T_A(O(n)) = \{AX \mid X \in \mathfrak{o}(n)\} = \{YA \mid Y \in \mathfrak{o}(n)\}$$

包含写像 $\iota : SO(n) \to M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ についても同様である．ただし，

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$$

証明. $O(n)$ については $O(n) = V_{n,n}$ だから上の例より直交群 $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元部分多様体である．$SO(n)$ は $O(n)$ の開かつ閉集合だから，$SO(n)$ についての主張も成り立つ．

次に接空間について考察する．$X \in \mathfrak{o}(n)$ に対し，$O(n)$ の C^∞ 級曲線 $c(t)$ を $c(t) = A \exp tX$ と定める．このとき，$c(0) = A$ だから，$\dot{c}(0) \in T_A(O(m))$.

$$(d\iota)_A \dot{c}(0) = \frac{d}{dt} A \exp tX_{|t=0} = AX \in (d\iota)_A(T_A(O(n))$$

よって，$\{AX \mid X \in \mathfrak{o}(n)\} \subset (d\iota)_A(T_A(O(n))$．ここで，$A$ は直交行列，特に，正則行列だから，

$$\dim\{AX \mid X \in \mathfrak{o}(n)\} = \dim \mathfrak{o}(n) = \dim O(n) = \dim(d\iota)_A(T_A(O(n))$$

ゆえに，$(d\iota)_A(T_A(O(n)) = \{AX \mid X \in \mathfrak{o}(n)\}$．残りの主張も同様に示せる． □

自然数 m, k は $(1 \leq)k \leq m$ を満たすとする．標準 Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対する $\mathbb{C}^m$ 内の正規直交 k 枠の全体を $W_{m,k}$ とする．

$W_{m,k}$ の元を表示するのに必要なパラメーターの数を調べてみよう．$W_{m,k}$ の元 A を $\mathbb{C}^m$ の列ベクトルを並べて $A = (a_1, \cdots, a_k)$ と表示すると，$\{a_1, \cdots, a_k\}$ は互いに直交する単位ベクトルである．単位ベクトル a_1 を指定するのに $2m-1 = \dim S^{2m-1}(\subset \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m)$ 個のパラメータが必要である．a_1 と直交する単位ベクトル a_2 を指定するのに $2m-3$ 個のパラメーターが必要である．a_1, a_2 と直交する単位ベクトル a_3 を指定するのに $2m-5$ 個のパラメーターが必要である．このように順に考えていくと $V_{m,k}$ の元を指定するのに $(2m-1)+(2m-3)+(2m-5)+\cdots+(2m-(2k-1)) = 2mk-k^2$ 個のパラメーターが必要である．

例 2.55. $W_{m,k}$ は $\mathbb{R}^{2mk} = \mathbb{C}^{km}$ の $k(2m-k)$ 次元 compact C^∞ 級部分多様体である．$W_{m,k}$ を**複素 Stiefel 多様体**という．

証明. $W_{m,k}$ は $\mathbb{R}^{2mk}$ の有界閉集合だから，compact である (定理 1.16)．$X = (z_1, \cdots, z_k) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_k + iy_k) \in M_{m,k}(\mathbb{C})$ とする．C^∞ 級関数 $f_{ij}, g_{ij} : M_{m,k}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{mk} = \mathbb{R}^{2mk} \to \mathbb{R}$ を

$$f_{ij}(X) = \langle x_i, x_j \rangle + \langle y_i, y_j \rangle - \delta_{ij}, \qquad g_{ij}(X) = \langle x_i, y_j \rangle - \langle y_i, x_j \rangle$$

と定めると，

$$W_{m,k} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2mk} \;\middle|\; \begin{array}{l} f_{ij}(X) = 0 \ (1 \le i \le j \le k), \\ g_{ij}(X) = 0 \ (1 \le i < j \le k) \end{array} \right\}$$

(2.20) と同様の等の記法を用いると，

$$\begin{aligned} (df_{ij})_X &= \langle dx_i, x_j \rangle + \langle x_i, dx_j \rangle + \langle dy_i, y_j \rangle + \langle y_i, dy_j \rangle, \\ (dg_{ij})_X &= \langle dx_i, y_j \rangle - \langle y_i, dx_j \rangle + \langle x_i, dy_j \rangle - \langle dy_i, x_j \rangle, \\ \langle \langle dx_i, x_j \rangle, &\langle dx_p, x_q \rangle \rangle = \langle x_j, x_q \rangle \delta_{ip} \end{aligned}$$

が得られる．よって，$W_{m,k}$ 上で

$$\begin{aligned} \langle (df_{ij})_X, (df_{pq})_X \rangle &= 2(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) = \begin{cases} 4 & (i = j = p = q), \\ 2 & (i = p < j = q), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ \langle (dg_{ij})_X, (dg_{pq})_X \rangle &= 2(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) = \begin{cases} 2 & (i = p < j = q), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ \langle (df_{ij})_X, (dg_{pq})_X \rangle &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに，Gramm 行列は対角行列で，各対角成分は $\neq 0$．よって主張が得られる． □

例 2.56. n 次**ユニタリー群** $U(n) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid X^*X = E_n\}$ は $\mathbb{R}^{2n^2}$ の compact n^2 次元 C^∞ 級部分多様体である．

$\iota : U(n) \to \mathbb{R}^{2n^2} = \mathbb{C}^{n^2} = M(n, \mathbb{C})$ で包含写像を表すと，$A \in U(n)$ に対し，

$$(d\iota)_A(T_A(U(n)) = \{AX \mid X \in \mathfrak{u}(n)\} = \{YA \mid Y \in \mathfrak{u}(n)\}$$

ただし，$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^* + X = O\}$．$\mathfrak{u}(n)$ は n^2 次元<u>実</u>ベクトル空間である．

証明. $U(n)=W_{n,n}$ だから上の例より $U(n)$ は $\mathbb{R}^{2n^2}$ の compact n^2 次元 C^∞ 級部分多様体である．接空間の表示は例 2.54 と同様にして示せる． □

例 2.57. n 次**シンプレクティック群** $Sp(n)=\{X\in M_n(\mathbb{H})\mid X^*X=E_n\}$ は $n(2n+1)$ 次元 C^∞ 級部分多様体である．$\iota: Sp(n)\to M_n(\mathbb{H})$ で包含写像を表すと，

$$(d\iota)_A(T_A(Sp(n))=\{AX\mid X\in\mathfrak{sp}(n)\}=\{XA\mid X\in\mathfrak{sp}(n)\}$$

ただし，$\mathfrak{sp}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{H})\mid X+X^*=O\}$.

特殊ユニタリー群 $SU(n)$ の元を表示するのに必要なパラメーターの数を調べてみよう．まず，$A\in U(n)$ に対し，$|\det(A)|=1$ が成り立つ．$SU(n)=\{A\in U(m)\mid \det(A)=1\}$ だから，$SU(n)$ の元を表示するのに必要なパラメーターの数は $n^2-1=\dim U(n)-1$ である．

例 2.58. n 次**特殊ユニタリー群**

$$\begin{aligned}SU(n)&=\{X\in M(n,\mathbb{C})\mid X^*X=E_n,\det(X)=1\}\\&=\{X\in U(n)\mid \mathrm{Re}(\det(X))=1\}\\&=\{X\in U(n)\mid \mathrm{Im}(\det(X))=0\}\text{ の単位連結成分}\end{aligned}$$

は $\mathbb{R}^{2n^2}$ の compact n^2-1 次元 C^∞ 級部分多様体である．$\iota: SU(n)\to\mathbb{R}^{2n^2}=\mathbb{C}^{n^2}=M(n,\mathbb{C})$ で包含写像を表すと，$A\in SU(n)$ に対し，

$$(d\iota)_A(T_A(SU(n))=\{AX\mid X\in\mathfrak{su}(n)\}=\{YA\mid Y\in\mathfrak{su}(n)\}$$

ただし，$\mathfrak{su}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X^*+X=O,\mathrm{tr}(X)=0\}$.

証明. $U(n)$ の部分群 G を

$$G:=\{X\in U(n)\mid \mathrm{Im}(\det X)=0\}$$

と定める．位相群 $SU(n)$ は G の開（かつ閉）部分群である．

$X=(z_1,\cdots,z_n)=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)\in M_n(\mathbb{C})$ とする．C^∞ 級関数 $f_{ij},g_{ij},h:\mathbb{R}^{2n^2}\to\mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned}f_{ij}(X)&=\langle x_i,x_j\rangle+\langle y_i,y_j\rangle-\delta_{ij},\\g_{ij}(X)&=\langle x_i,y_j\rangle-\langle y_i,x_j\rangle,\quad h(X)=\mathrm{Im}(\det X)\end{aligned}$$

と定めると，

$$G=\left\{X\in\mathbb{R}^{2mk}\;\middle|\;\begin{array}{l}f_{ij}(X)=0\ (1\le i\le j\le n),\\g_{ij}(X)=0\ (1\le i<j\le n),\ h(X)=0\end{array}\right\}$$

補題 2.59. $X=(z_1,\cdots,z_n)=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)$ の (i,j) 余因子を $X_{ij}+iY_{ij}$ とおくとき,

$$
\begin{aligned}
\langle (df_{ij})_X,(dh)_X\rangle &= \sum_k (x_{kj}Y_{ki}+x_{ki}Y_{kj}+y_{kj}X_{ki}+y_{ki}X_{kj}),\\
\langle (dg_{ij})_X,(dh)_X\rangle &= \sum_k (y_{kj}Y_{ki}-y_{ki}Y_{kj}-x_{kj}X_{ki}+x_{ki}X_{kj}),\\
\|(dh)_X^2\| &= \sum (X_{ij}^2+Y_{ij}^2)
\end{aligned}
$$

証明. $Z_{ij}=X_{ij}+iY_{ij}$ とおく.

$$
(d\det)_X = d\begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n1} & \cdots & z_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dz_{11} & \cdots & dz_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n1} & \cdots & z_{nn}\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ dz_{n1} & \cdots & dz_{nn}\end{vmatrix}
$$

だから

$$
\langle (d\det)_X, dx_{ij}\rangle = \left\langle \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ dz_{i1} & \cdots & dz_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n1} & \cdots & z_{nn}\end{vmatrix}, dx_{ij}\right\rangle = Z_{ij},
$$

$$
\langle (d\det)_X, dy_{ij}\rangle = \left\langle \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ dz_{i1} & \cdots & dz_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n1} & \cdots & z_{nn}\end{vmatrix}, dy_{ij}\right\rangle = iZ_{ij}
$$

よって,

$$(d\det)_X = \sum (Z_{ij}dx_{ij} + iZ_{ij}dy_{ij})$$

虚部をとり,

$$(dh)_X = \mathrm{Im}(d\det)_X = \sum (Y_{ij}dx_{ij} + X_{ij}dy_{ij})$$

これより直ちに主張が得られる. □

補題 2.60. G 上で

$$\langle (df_{ij})_X,(dh)_X\rangle = \langle (dg_{ij})_X,(dh)_X\rangle = 0, \qquad \|(dh)_X^2\| = n$$

証明. $\epsilon := \det X = \pm 1$ とおく．X の余因子行列を $\tilde{X}$ と表すと，$X\tilde{X} = \epsilon E_n$．$X \in G$ より $XX^* = E_n$ だから，$\tilde{X} = \epsilon X^*$．ゆえに，

$$X_{ji} + iY_{ji} = \epsilon(x_{ji} - iy_{ji})$$

よって，$X_{ij} = \epsilon x_{ji}, Y_{ji} = -\epsilon y_{ji}$．これより直ちに主張が得られる． □

□

[参考] 上にあげた $SU(n)$ 等が C^∞ 級多様体，より強く Lie 群となることを示すには次の強力な定理を使う方が早い．

定理 2.61. Lie 群の閉部分群はまた Lie 群である．

証明については [1, 定理 3.6.4] を参照.

3 Morse 理論

3.1 Morse 関数

2 変数関数の微分積分学で次のことを学んだ：

$\mathbb{R}^2$ で定義された C^2 級関数 $f(x,y)$ が点 $P(a,b)$ で極値をとれば，P は f の臨界点，すなわち，$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$．逆に f の臨界点 P に対し，対称行列 $(Hf)(P)$ を

$$(Hf)(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}$$

と定めると，次が言える．P が f の非退化臨界点，すなわち，$(Hf)(P)$ が正則のとき，

(i) f の P における指数 (=「$(Hf)(P)$ の負の固有値の個数」) が 2 ならば，f は P で極大である．

(ii) f の P における指数が 1 ならば，f は P で極値をとらない．

(iii) f の P における指数が 0 ならば，f は P で極小である．

典型例は

(i) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ (ii) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (iii) $f(x,y) = x^2 + y^2$

である．$(Hf)(P)$ が正則でないときには，いろいろな可能性があり，$(Hf)(P)$ の情報だけでは何とも言えない．

この節では，上のことを拡張して，多様体上の関数に対し，臨界点，非退化臨界点を定義する．これらの概念を用いて Morse 関数とその臨界点における指数を定義する．また，いくつかの具体的な Morse 関数に対し，その臨界点を求め，指数を計算する．

定義 3.1. $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$p \in M$ が f の**臨界点**であるとは，$(df)_p = 0$ となるときをいう．

M の局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ を用いれば，

$$(df)_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(dx_i)_p$$

だから，p が f の臨界点 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0\ (1 \leq i \leq m)$．

命題 3.2. $p \in M$ を $f : M \to \mathbb{R}$ の臨界点とする．$u, v \in T_p(M)$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張したものをそれぞれ X, Y と表す．

$$(Hf)_p(u,v) := X_p(Yf) = u(Yf) \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

と定義すると．$(Hf)_p(u,v)$ の値は X, Y の取り方によらない (well-defined)．$(Hf)_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ は対称双一次形式になる．

証明．well-defined の証明は省略する．(局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ をとり，$u = (\frac{\partial}{\partial x_i})_p, v = (\frac{\partial}{\partial x_j})_p$ とした場合は，$(Hf)_p(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ となる．)

対称性を示す：

$$(Hf)_p(u,v) - (Hf)_p(v,u) = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X,Y]_p f$$

ここで，$[X,Y]_p \in T_p(M)$ で，p は f の臨界点だから，$[X,Y]_p f = 0$．ゆえに，$(Hf)_p$ は対称になる．双一次形式となることは明らかである．□

f の臨界点 $p \in M$ に対し，対称双一次形式 $(Hf)_p$ を f の p における **Hesse 形式** という．$(Hf)_p$ は対称だから，$(Hf)_p$ の表現行列の固有値は実数になる．$(Hf)_p$ の正の固有値の個数，負の固有値の個数は表現行列の取り方によらない (Sylvester の慣性法則)．$(Hf)_p$ が正則になる (すなわち，0 を固有値にもたない) とき，臨界点 p を f の**非退化臨界点**という．非退化臨界点 p に対し，$(Hf)_p$ の負の固有値の個数を f の p における**指数**という．

$f : M \to \mathbb{R}$ の臨界点 p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ をとれば，

$$(Hf)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

だから，$(Hf)_p$ の表現行列は

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{1\le i,j\le m} \tag{3.22}$$

となる．これを $(x_1, \cdots, x_m)$ に関する **Hesse 行列**という．

問題 3.1. $(V; y_1, \cdots, y_m)$ を臨界点 p のまわりの他の座標近傍とすると，

$$(3.24) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)\right)_{1\le i,j\le m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(p)\right)_{1\le i,j\le m} {}^t\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)\right)_{1\le i,j\le m}$$

となることを示せ．

$p \in M$ を C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の非退化臨界点とする．p のまわりの局所座標系 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ を $x_i(p) = 0$ $(1 \le i \le m)$ ととる．p が f の非退化臨界点であることに注意して，$f(x_1, \cdots, x_m)$ を p のまわりで 2 次式で近似し，2 次式の標準形を使うと次の Morse の基本補題が得られる．

命題 3.3. [**Morse の基本補題**]$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．このとき，$p \in M$ が f の非退化臨界点であるとすると，点 p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ を $x_i(p) = 0$ $(1 \le i \le m)$ かつ，ある $1 \le r \le m$ に対し，

$$f(x_1, \cdots, x_m) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_m^2 \tag{3.23}$$

を満たすように選べる．

証明．p のまわりの局所座標系 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ を $x_i(p) = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ ととる．$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) \neq 0$ としてよいことをまず示す．$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(p)$ $(1 \leq i \leq m)$ の中に $\neq 0$ となるものがあれば，番号 $i = 1, \cdots, m$ を付けかえることにより，$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) \neq 0$ とできる．$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p) = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ のとき，$(Hf)_p$ は非退化だから，特に，$(Hf)_p \neq O$．よって，$i \neq j$ が存在して，$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \neq 0$．番号を付けかえて，$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \neq 0$ としてよい．新しい局所座標系 $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m)$ を

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2), \quad y_3 = x_3, \cdots, y_m = x_m$$

と定めると，$x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2$ だから，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \neq 0
\end{aligned}$$

$(y_1, \cdots, y_m)$ を新たに $(x_1, \cdots, x_m)$ と書くと，$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) \neq 0$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}
f(x_1, \cdots, x_m) - f(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \cdots, tx_m) dt \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, \cdots, tx_m) dt \; x_i
\end{aligned}$$

ここで，C^∞ 級関数 $g_i(x_1, \cdots, x_m)$ を

$$g_i(x_1, \cdots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, \cdots, tx_m) dt$$

と定めると，

$$\begin{aligned}
f(x_1, \cdots, x_m) - f(p) &= \sum_{i=1}^m g_i(x_1, \cdots, x_m) x_i, \\
g_i(0, \cdots, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \cdots, 0) = 0
\end{aligned}$$

同様に，C^∞ 級関数 $h_{ij}(x_1, \cdots, x_m)$ が存在して，

$$g_i(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{j=1}^m h_{ij}(x_1, \cdots, x_m) x_j$$

ここで，$H_{ij}(x_1,\cdots,x_m)=\frac{1}{2}(h_{ij}(x_1,\cdots,x_m)+h_{ji}(x_1,\cdots,x_m))$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\cdots,x_m)-f(p)=\sum_{i,j}H_{ij}(x_1,\cdots,x_m)x_ix_j,\\
&H_{ij}(x_1,\cdots,x_m)=H_{ji}(x_1,\cdots,x_m),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(p)=2H_{ij}(p),\quad H_{11}(p)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p)\neq 0,\\
&\text{原点の近くで } H_{11}(x_1,\cdots,x_m)\neq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．

自然数 m に関する数学的帰納法で主張を示す．

$m=1$ のとき，$x=x_1$ とおくと，$f(x)=X_1(x)x^2, H_1(0)\neq 0$．新しい座標系 y を $y=\sqrt{|H_{11}(x)|}x$ と定めると，$f=\pm y^2$ となり，主張は成り立つ．

$m-1$ まで主張が成り立つと仮定する．H_{11} の符号を $\epsilon=\pm 1$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\cdots,x_m)-f(p)\\
&=H_{11}\left(x_1+\frac{1}{H_{11}}\sum_{j=2}^m H_{1j}x_j\right)^2-\frac{1}{H_{11}}\left(\sum_{j=2}^m H_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i,j\geq 2}H_{ij}x_ix_j\\
&=\epsilon X_1^2-\frac{1}{H_{11}}\left(\sum_{j=2}^m H_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i,j\geq 2}H_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

ここで，

$$X_1:=\sqrt{|H_{11}|}\left(x_1+\sum_{i=2}^m x_i\frac{H_{1i}}{H_{11}}\right)$$

$(X_1,x_2,\cdots,x_m)$ を考える．Jacobi の関数行列式 $\frac{\partial(X_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}$ は原点において，

$$\frac{\partial(X_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}(0,\cdots,0)=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}(0,\cdots,0)=\sqrt{H_{11}(0,\cdots,0)}>0$$

だから，$(X_1,x_2,\cdots,x_m)$ も p のまわりの局所座標系である．C^∞ 級関数 $\tilde{H}_{ij}(X_1,x_2,\cdots,x_m)$ が存在して，

$$f(x_1,\cdots,x_m)-f(p)=\epsilon X_1^2+\sum_{i,j\geq 2}\tilde{H}_{ij}(X_1,x_2,\cdots,x_m)x_ix_j$$

という形になる．よって，数学的帰納法により主張が成り立つ．　□

定義 3.4. M を compact C^∞ 級多様体とする．C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき，f を **Morse 関数**という．

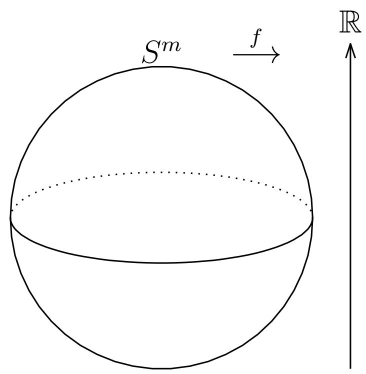
(1) f の臨界点はすべて非退化である．

(2) p, q を f の相異なる臨界点とするとき，$f(p) \neq f(q)$.

定義 3.4 の条件 (1) は本質的であるが，条件 (2) は本質的ではない.[2]実際，(1) を満たす C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を少し変形することにより (2) を満たすようにできる ([6, 定理 2.34]).

問題 3.2. 次を示せ．$f : M \to \mathbb{R}$ が Morse 関数ならば，$-f$ も Morse 関数であり，f の臨界点全体のなす集合と $-f$ の臨界点全体のなす集合は一致する．臨界点 p における f の指数と $-f$ の指数の和は $\dim M$ である．

例題 3.1. $p = (p_1, \cdots, p_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ に対し，$x_i(p) = p_i$ とおく．m 次元球面 S^m 上の関数 $f : S^m \to \mathbb{R}; p \mapsto x_{m+1}(p)$ は Morse 関数であることを示せ．また，f の臨界点と臨界点における指数を求めよ．



解答. $x_{m+1}(p) > 0$ のとき，$x_1, \cdots, x_m$ は S^m の局所座標系であり，

$$f = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{m} x_k^2}$$

これより，

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{\sqrt{1 - \sum x_k^2}}$$

だから，$(df)_p = 0 \Leftrightarrow p = (0, \cdots, 0, 1) \in S^m$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{-\delta_{ij}\sqrt{1 - \sum x_k^2} + x_i \frac{x_j}{\sqrt{1 - \sum x_k^2}}}{1 - \sum x_k^2}$$

[2]書物によっては定義 3.4, (1) を満たす関数を Morse 関数ということもある．

だから臨界点 $p=(0,\cdots,0,1)$ において，$H(f)(p)=(-\delta_{ij})=-E_m$．よって，$p$ は非退化で p における f の指数は m である．

$x_{m+1}(q)<0$ のとき，$x_1,\cdots,x_m$ は S^m の局所座標系であり，

$$f=-\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m}x_i^2}$$

上と同様の計算で $(df)_q=0 \Leftrightarrow q=(0,\cdots,0,-1)$ となることが示せる．臨界点 $q=(0,\cdots,0,-1)$ において，$H(f)(q)=(\delta_{ij})$ だから，q は非退化で q における f の指数は 0 である．

$x_{m+1}(p)=0$ のとき，ある $1\leq i\leq m$ が存在して，$x_i(p)\neq 0$．p のまわりの局所座標系として，$x_1,\cdots,\hat{x_i},\cdots,x_{m+1}$ が採用できる．この座標系に関して $f=x_{m+1}, df=dx_{m+1}\neq 0$ だから，$x_{m+1}(p)=0$ となる p は臨界点ではない． □

[参考] m 次元球面 S^m の基本群 $\pi_1(S^m)$ については

$$\pi_1(S^m)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (m=1),\\ \{1\} & (m\geq 2)\end{cases}$$

となることが知られている．

問題 3.3. 2 次元トーラス $T^2=S^1\times S^1$ 上の関数 f を

$$\begin{aligned}&f:T^2\to\mathbb{R};((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto(x_2+2)y_2\\&\text{ただし}\quad x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=1\end{aligned}$$

と定める．f は Morse 関数であることを示せ．また，f の臨界点と臨界点における指数を求めよ．

問題 3.4. 次を示せ．M を m 次元 compact C^∞ 級多様体，$f:M\to\mathbb{R}$ を Morse 関数とする．

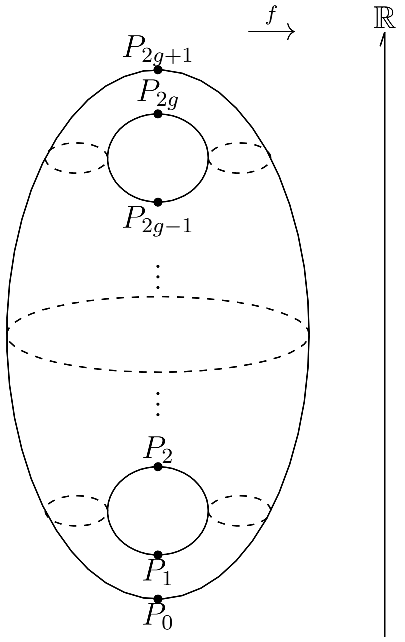
(1) f が点 $p\in M$ で最小値をとれば，p は f の臨界点であり，p における f の指数は 0 になる．

(2) f が点 $q\in M$ で最大値をとれば，q は f の臨界点であり，q における f の指数は m になる．

定理 3.5. M を compact C^∞ 級多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を Morse 関数とする．このとき，f の臨界点の個数は有限個である．

証明. Morse の補題（命題 3.3）より，臨界点の全体は M の離散集合になる．f は C^∞ 級なので特に C^1 級である．よって，臨界点の全体は M の閉集合になる．M は compact だから，臨界点の全体は compact になる (問題 1.14)．離散集合が compact になるための条件は，その集合が有限集合になること (例 1.17) だから，主張が従う． □

例 3.6. 右図のような g 個の穴をもつ曲面 Σ_g を**種数** g の向き付け可能な閉曲面という．$g = 1$ のときは，Σ_1 は 2 次元トーラスである．右図のような高さ関数 f は Morse 関数である．f の臨界点は $P_0, P_1, \cdots, P_{2g}, P_{2g+1}$ の全部で $2g+2$ 個であり，指数 0 の臨界点は P_0 の 1 個，指数 2 の臨界点は P_{2g+1} の 1 個，指数 1 の臨界点は $P_1, \cdots, P_{2g}$ の $2g$ 個である．
[参考] compact 向き付けられた境界のない 2 次元連結多様体は Σ_g に微分同型であることが知られている ([6])．



問題 3.5. [積多様体の Morse 関数] M, N をそれぞれ m, n 次元 C^∞ 級多様体とする．f, g をそれぞれ M, N 上の C^∞ 級関数とする．直積多様体 $M \times N$ 上の関数 $f + g$ を $(f+g)(x,y) = f(x) + g(y)$ $(x \in M, y \in N)$ と定める．このとき，次を示せ．

(1) $d(f+g)_{(p,q)} = 0 \Leftrightarrow (df)_p = 0, (dg)_q = 0.$

(2) (p, q) が $f + g$ の非退化臨界点になるための必要十分条件は，p, q がそれぞれ f, g の非退化臨界点になることである．このとき，$f + g$ の点 (p, q) における指数は，f の p における指数と g の q における指数の和になる．

(3) M, N は共に compact で，f, g はそれぞれ M, N の Morse 関数とする．$\{p_1, \cdots, p_k\}$, $\{q_1, \cdots, q_l\}$ をそれぞれ f, g の臨界点全部の集合とする．さらに，$\max_{i \neq j} |f(p_i) - f(p_j)| < \min_{i \neq j} |g(q_i) - g(q_j)|$ と仮定する．このとき，$f + g$ は $M \times N$ の Morse 関数である．

例 3.7. [m 次元トーラス T^m 上の Morse 関数]　単位円周 S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto y$ は Morse 関数で，臨界点は $p_{\pm 1} = (0, \pm 1)$ の 2 点である．p_{+1} における指数は 1 で p_{-1} における指数は 0 である (例題 3.1). 正の数 $a_1, \cdots, a_m$ を

$$a_1 < a_2, \quad a_1 + a_2 < a_3, \quad \cdots, \quad a_1 + \cdots + a_{m-1} < a_m$$

ととり，m 次元トーラス T^m 上の関数 F を

$$F(p_1, \cdots, p_m) = a_1 f_1(p_1) + \cdots + a_m f_m(p_m)$$

と定める．F は Morse 関数で，臨界点全部の集合は $\{(p_{\epsilon_1}, \cdots, p_{\epsilon_m}) \mid \epsilon_i = \pm 1\}$ であり，2^m 個の元からなる．$(p_{\epsilon_1}, \cdots, p_{\epsilon_m})$ における指数は $\#\{\epsilon_i \mid \epsilon_i = 1\}$ である（問題 3.5）．

例 3.8. [実射影空間 $\mathbb{R}P^m$ の Morse 関数]　$c_1 < c_2 < \cdots < c_{m+1}$ に対し，$\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ 上の関数

$$\tilde{f}(x_1, \cdots, x_{m+1}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} c_k x_k^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} x_k^2} = \sum_{j=1}^{m+1} c_j \left(\frac{x_j}{\sqrt{\sum x_k^2}} \right)^2$$

を考える．$a \neq 0$ のとき，$\tilde{f}(ax_1, \cdots, ax_{m+1}) = \tilde{f}(x_1, \cdots, x_{m+1})$ だから，$\tilde{f}$ は $\mathbb{R}P^m$ の関数 f を誘導する．f は Morse 関数で，臨界点は $\mathbb{R}e_i$ $(i = 1, \cdots, m+1)$ であり，各臨界点 $\mathbb{R}e_i$ における指数は，$i - 1$ である．

証明. $V_i := \{x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \mid x_i > 0\}$ とおくと，$\{\pi(V_i) \mid i = 1, \cdots, m+1\}$ は $\mathbb{R}P^m$ の有限開被覆である．$\pi(V_i)$ 上の局所座標系として，

$$y_j = \frac{x_j}{x_i} \quad (j = 1, \cdots, i-1), \quad y_j = \frac{x_{j+1}}{x_i} \quad (j = i, \cdots, m)$$

を用いると

$$f(y_1, \cdots, y_m) = \frac{c_i + \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} c_k y_k^2 + \sum_{k=i}^{m} c_{k+1} y_k^2}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} y_k^2}$$

よって，f は C^∞ 級関数である．ここで，次の座標変換 $\mathbb{R}^m \to E^m; (y_1, \cdots, y_m) \mapsto (z_1, \cdots, z_m)$ を行う：

$$z_j = \frac{y_j}{\sqrt{1 + \sum y_k^2}}$$

Jacobi の関数行列は

$$\left(\frac{\partial z_j}{\partial y_i}\right) = \left(\frac{\delta_{ij}(1 + \|y\|^2) - y_i y_j}{(1 + \|y\|^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{(1 + \|y\|^2)^{3/2}} \left((1 + \|y\|^2)E_m - y^t y\right)$$

この行列式が $O(n)$ 不変であることに注意すると，Jacobi の関数行列式は

$$\left|\left(\frac{\partial z_j}{\partial y_i}\right)\right| = \frac{(1 + \|y\|^2)^{m-1}}{(1 + \|y\|^2)^{3m/2}} = \frac{(1 + \|y\|^2)^{m-1}}{(1 + \|y\|^2)^{m/2+1}} > 0$$

逆変換は

$$y_j = \frac{z_j}{\sqrt{1 - \sum z_k^2}}$$

である．

$$\sum_{k=1}^{m} z_k^2 = \frac{1 + \sum y_k^2 - 1}{\sum y_k^2 + 1} = 1 - \frac{1}{\sum y_k^2 + 1}$$

だから，

$$\begin{aligned} f(z_1, \cdots, z_m) &= \sum_{j=1}^{i-1} c_j z_j^2 + \sum_{j=i}^{m} c_{j+1} z_j^2 + c_i(1 - \sum_{j=1}^{i-1} z_j^2 - \sum_{j=i}^{m} z_j^2) \\ &= c_i - \sum_{j=1}^{i-1}(c_i - c_j) z_j^2 + \sum_{j=i}^{m}(c_{j+1} - c_i) z_j^2 \end{aligned}$$

よって，

$$(df)_z = 0 \Leftrightarrow (z_1, \cdots, z_m) = (0, \cdots, 0) \Leftrightarrow z = \mathbb{R}e_i$$

$f(\mathbb{R}e_i) = c_i$ $(1 \leq i \leq m+1)$ だから，これらの値はすべて異なる．f は点 $\mathbb{R}e_i$ で非退化であり，指数は $i-1$ である． □

例 3.9. [複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$ の Morse 関数] $c_1 < c_2 < \cdots < c_{m+1}$ に対し $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ 上の関数

$$\tilde{f}(z_1, \cdots, z_{m+1}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} c_k |z_k|^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} |z_k|^2} = \sum_{j=1}^{m+1} c_j \left| \frac{z_j}{\sum |z_k|^2} \right|^2$$

を考える．$a \in \mathbb{C} - \{0\}$ のとき，$\tilde{f}(az_1, \cdots, az_{m+1}) = \tilde{f}(z_1, \cdots, z_{m+1})$ だから，$\tilde{f}$ は $\mathbb{C}P^m$ の関数 f を誘導する．f は Morse 関数で，臨界点は $\mathbb{C}e_i$ $(i = 1, \cdots, m+1)$ であり，各臨界点 $\mathbb{C}e_i$ における指数は，$2(i-1)$ である．

証明. $V_i := \{z = (z_1, \cdots, z_{m+1}) \in \mathbb{C}^{m+1} - \{0\} \mid z_i \neq 0\}$ とおくと，$\{\pi(V_i) \mid i = 1, \cdots, m+1\}$ は $\mathbb{C}P^m$ の有限開被覆である．$\pi(V_i)$ 上で

$$w_j = \frac{z_j}{z_i} \quad (j = 1, \cdots, i-1), \quad w_j = \frac{z_{j+1}}{z_i} \quad (j = i, \cdots, m)$$

とおき，$\pi(V_i)$ 上の局所座標系 $\{\mathrm{Re}(w_1), \mathrm{Im}(w_1), \cdots, \mathrm{Re}(w_m), \mathrm{Im}(w_m)\}$ を用いる．$f(\mathrm{Re}(w_1), \mathrm{Im}(w_1), \cdots, \mathrm{Re}(w_m), \mathrm{Im}(w_m))$ を $f(w_1, \cdots, w_m)$ と略記すると，

$$f(w_1, \cdots, w_m) = \frac{c_i + \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} c_k |w_k|^2 + \sum_{k=i}^{m} c_{k+1} |w_k|^2}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} |w_k|^2}$$

よって，f は C^∞ 級関数である．ここで，

$$\zeta_j = \frac{w_j}{\sqrt{\sum |w_k|^2 + 1}}$$

とおき，変数変換 $\{\mathrm{Re}(w_j), \mathrm{Im}(w_j)\} \mapsto \{\mathrm{Re}(\zeta_j), \mathrm{Im}(\zeta_j)\}$ を行うと，

$$f(\zeta_1, \cdots, \zeta_m) = c_i - \sum_{j=1}^{i-1} (c_i - c_j)|\zeta|_j^2 + \sum_{j=i}^{m} (c_{j+1} - c_i)|\zeta|_j^2$$

よって，

$$(df)_w = 0 \Leftrightarrow (\zeta_1, \cdots, \zeta_m) = (0, \cdots, 0) \Leftrightarrow w = \mathbb{C}e_i$$

$f(\mathbb{C}e_i) = c_i$ $(1 \leq i \leq m+1)$ だから，これらの値はすべて異なる．f は点 $\mathbb{C}e_i$ で非退化であり，指数は $2(i-1)$ である． □

[参考] $\mathbb{C}P^m$ は単連結である．([6, 例 5.10])

例 3.10. [直交群 $O(m)$ 上の Morse 関数] $0 < c_1 < \cdots < c_m$ とする．$O(m)$ 上の C^∞ 級関数 $f : O(m) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ii} \qquad ((x_{ij}) \in O(m))$$

と定める．

補題 3.11. f の臨界点は $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ $(\epsilon_i = \pm 1)$.

証明. $p = (p_{ij}) \in O(m)$ とおく．$u \in \mathfrak{o}(m)$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f((\exp tu)p)_{|t=0} &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \sum_{i,j} c_i (\exp tu)_{ij} p_{ji} \qquad (f \text{ の定義}) \\ &= \sum_{i,j} c_i (\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp tu)_{ij} p_{ji} = \sum_{i,j} c_i u_{ij} p_{ji} \\ &= \sum_i c_i (up)_{ii}\end{aligned}$$

(上の計算で $\exp tu$ の具体的な表示は必要ない)

同様に,

$$\frac{d}{dt} f(p \exp tu)_{|t=0} = \sum_i c_i (pu)_{ii}$$

p が f の臨界点となるための必要十分条件は，任意の $u \in \mathfrak{o}(m)$ について,

$$\sum_i c_i (up)_{ii} = \sum_i c_i (pu)_{ii} = 0$$

$0 < c_i$ と $i \neq j$ のとき $c_i \neq c_j$ を用いて，主張が得られる． □

補題 3.12. f の臨界点 $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ $(\epsilon_i = \pm 1)$ における Hesse 行列は，対角行列であり,

$$(Hf)_p (E_{ij} - E_{ji}, E_{kl} - E_{lk}) = -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) \delta_{ik} \delta_{jl} \qquad (i < j, k < l))$$

特に，各臨界点は非退化である．

証明. $u = E_{ij} - E_{ji}$ $(i < j), v = E_{kl} - E_{lk}$ $(k < l)$ とおく. vp を $\frac{d}{dt} p \exp sv_{|t=0}$ によって, $O(m)$ の p における接ベクトルと見る. これを $O(m)$ 上の C^∞ 級ベクトル場 Y に

$$Y_q = \frac{d}{ds} q \exp sv_{|s=0} \in T_q(O(m))$$

によって拡張する. (3.21) より,

$$\begin{aligned}
(Hf)_p(up, vp) &= u(Yf) = \frac{d}{dt}(Yf)(p \exp tu)_{|t=0} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(p \exp tu \exp sv)_{|s=t=0} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}_{|s=t=0} \sum_i c_i (p \exp tu \exp sv)_{ii} && (f \text{ の定義}) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}_{|s=t=0} \sum_{i,j,k} p_{ij} (\exp tu)_{jk} (\exp sv)_{ki} \\
&= \sum_{i,j,k} \epsilon_i \delta_{ij} (\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp tu)_{jk} (\frac{d}{ds}_{|s=0} \exp sv)_{ki} && (p = (\epsilon_i \delta_{ij})) \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_i u_{ik} v_{ki} = \sum_i \epsilon_i (uv)_{ii} && (3.24)
\end{aligned}$$

これを用いて, $(Hf)_p$ の表示式が得られる. $0 < c_i$ と $i \neq j$ のとき $c_i \neq c_j$ を用いて, $-(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) \neq 0$ が得られる. ゆえに, 各臨界点は非退化である. □

補題 3.13. $2c_i < c_{i+1}$ のとき, f は Morse 関数である.

証明. $\{i_1, \cdots, i_q\} = \{i \mid \epsilon_i = 1\}$ とおく. 臨界点 $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ において,

$$f(p) = \sum_{i=1}^m c_i \epsilon_i = \sum_{k=1}^q c_{i_k} - (\sum_{i=1}^m c_i) - \sum_{k=1}^q c_{i_k}) = 2 \sum_{k=1}^q c_{i_k} - \sum_{i=1}^m c_i$$

各臨界値がすべて異なることをいえばよい. そのためには, $\{1, \cdots, m\}$ の部分集合 A, B に対し, $\sum_{i \in A} c_i = \sum_{j \in B} c_j \Rightarrow A = B$ を言えばよい. $i_0 = \max\{i \mid c_i \in A \cup B\}$ とおく. $i_0 \in A$ または $i_0 \in B$ である. $i_0 \notin B$ ならば,

$$\sum_{j \in B} c_j \le \sum_{j=1}^{i_0 - 1} c_j < \sum_{j=1}^{i_0 - 1} \frac{c_{i_0}}{2^{i_0 - j}} \le c_{i_0} \le \sum_{i \in A} c_i$$

となり矛盾が起こる．ゆえに，$i_0 \in B$．よって，$i_0 \in A \cap B$．帰納的に，$A = B$ が得られる． $\square$

補題 3.14. f の臨界点 $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ に対し，$\{i_1, \cdots, i_q\} = \{i \mid \epsilon_i = 1\}$ とおく．点 p における f の指数は $(i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \cdots + (i_q - 1)$．

証明. 補題 3.12 より，対角行列 $(Hf)_p$ の対角成分は $-(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j)$ $(i < j)$．よって，指数は $\#\{(i,j) \mid -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) < 0, 1 \le i < j \le m\}$．ここで，

$$\begin{aligned}
&\epsilon_i = \epsilon_j = 1 \Rightarrow -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) = -(c_i + c_j) < 0, \\
&\epsilon_i = -1, \epsilon_j = 1 \Rightarrow -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) = c_i - c_j < 0, \\
&\epsilon_i = \epsilon_j = -1 \Rightarrow -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) = c_i + c_j > 0, \\
&\epsilon_i = 1, \epsilon_j = -1 \Rightarrow -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) = c_j - c_i > 0
\end{aligned}$$

よって，$-(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) < 0 \Leftrightarrow \epsilon_j = 1 (i < j)$．ゆえに指数は

$$\begin{aligned}
&\#\{(i,j) \mid -(\epsilon_i c_i + \epsilon_j c_j) < 0, 1 \le i < j \le m\} = \#\{(i,j) \mid \epsilon_j = 1\} \\
&= \#\{(i, i_k) \mid 1 \le i \le i_k - 1, 1 \le k \le q\} \\
&= (i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \cdots + (i_q - 1)
\end{aligned}$$

$\square$

例 3.15. [ユニタリー群 $U(m)$ 上の Morse 関数] $0 < c_1 < \cdots < c_m$ とする．$U(m)$ 上の C^∞ 級関数 $f : U(m) \to \mathbb{R}$ を

$$f(p) = \mathrm{Re}(\sum_{i=1}^{m} c_i z_{ii}) \qquad (p = (z_{ij}) \in U(m))$$

と定める．

$$u_{ij} := E_{ij} - E_{ji}, \quad v_i := \sqrt{-1} E_{ii}, \quad v_{ij} := \sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji})$$

とおくと，

$$\{pu_{ij} \mid i < j\} \cup \{pv_{ij} \mid i \le j\} \cup \{pv_i \mid i\}$$

は $(d\iota)_p T_p(U(m))$ の基底である．

補題 3.16. f の臨界点は $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ $(\epsilon_i = \pm 1)$．

証明．$p = (z_{ij})$ とおく．$u \in \mathfrak{u}(m)$ とする．補題 3.11 と同様の計算により，

$$\frac{d}{dt} f((\exp tu)p)_{|t=0} = \sum_i c_i \mathrm{Re}(up)_{ii},$$
$$\frac{d}{dt} f(p \exp tu)_{|t=0} = \sum_i c_i \mathrm{Re}(pu)_{ii}$$

p が f の臨界点となるための必要十分条件は，任意の $u \in \mathfrak{o}(m)$ について，

$$\sum_i c_i \mathrm{Re}(up)_{ii} = \sum_i c_i \mathrm{Re}(pu)_{ii} = 0$$

$0 < c_i$ と $i \neq j$ のとき，$c_i \neq c_j$ を用いて，主張が得られる． □

補題 3.17. f の臨界点 $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ $(\epsilon_i = \pm 1)$ における Hesse 行列は，対角行列であり，

$$(Hf)_p(v_i, v_i) = -c_i \epsilon_i,$$
$$(Hf)_p(v_{ij}, v_{ij}) = (Hf)_p(v_{ij}, v_{ij}) = -(c_i \epsilon_i + c_j \epsilon_j) \quad (i < j)$$

特に，各臨界点は非退化である．

証明．(3.24) と同様に計算により，

$$(Hf)_p(u, v) = \sum_i \epsilon_i \mathrm{Re}(uv)_{ii}$$

これを用いて，主張が得られる． □

補題 3.13 の証明と同様にして，$2c_i < c_{i+1}$ のとき，f は Morse 関数であることが示せる．補題 3.14 の証明と同様にして，次が示せる．f の臨界点 $p = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ に対し，$\{i_1, \cdots, i_q\} = \{i \mid \epsilon_i = 1\}$ とおく．点 p における f の指数は

$$2(i_1 - 1) + 2(i_2 - 1) + \cdots + 2(i_q - 1) + q = (2i_1 - 1) + (2i_2 - 1) + \cdots + (2i_q - 1)$$

例 3.18. [シンプレクティック群 $Sp(m)$ 上の Morse 関数] $0 < c_1 < \cdots < c_m$ とする．$Sp(m)$ 上の C^∞ 級関数 $f : Sp(m) \to \mathbb{R}$ を

$$f(p) = \mathrm{Re}(\sum_{a=1}^m c_a z_{aa}) \qquad (p = (z_{ab}) \in Sp(m))$$

と定める．このとき，f は Morse 関数であり，臨界点は $p = (\epsilon_a \delta_{ab})_{a,b}$．臨界点 $p = (\epsilon_a \delta_{ab})_{a,b}$ における指数は $(4i_1 - 1) + \cdots + (4i_q - 1)$．ここで，$\{i_1, \cdots, i_q\} = \{i \mid \epsilon_i = 1\}$.

証明. $\iota : Sp(m) \to \mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{4m}$ で包含写像を表すと,

$$(d\iota)_A T_A(Sp(m)) = \{AX \mid X \in \mathfrak{sp}(m)\} = \{XA \mid X \in \mathfrak{sp}(m)\}$$

$p = (x_{ab}) \in Sp(m)$ が f の臨界点になるための必要十分条件は，任意の $u \in \mathfrak{sp}(m)$ について,

$$\mathrm{Re}(\sum c_a(pu)_{aa}) = \mathrm{Re}(\sum c_a(up)_{aa}) = 0$$

$p = (x_{ab}) \in Sp(m)$ を f の臨界点とする．$u = iE_{dd}$ のとき，$pu = \sum_a x_{ad} iE_{ad}$ だから，$\mathrm{Re}(\sum c_a(pu)_{aa}) = \mathrm{Re}(c_d x_{dd} i) = 0$．$c_d > 0$ より，$\mathrm{Re}(x_{dd}i) = 0$. 同様に，$u = jE_{dd}, kE_{dd}$ とおくことにより，$\mathrm{Re}(x_{dd}j) = \mathrm{Re}(x_{dd}k) = 0$ が得られる．よって，$x_{dd} \in \mathbb{R}$.

$u = E_{de} - E_{ed}$ とおくと,

$$pu = \sum_a (x_{ad}E_{ae} - x_{ae}E_{ad}), \quad up = \sum_b (x_{eb}E_{db} - x_{db}E_{eb})$$

これより,

$$c_e \mathrm{Re}(x_{ed}) - c_d \mathrm{Re}(x_{de}) = 0, \quad c_d \mathrm{Re}(x_{ed}) - c_e \mathrm{Re}(x_{de}) = 0$$

$0 < c_1 < \cdots < c_m$ より，$\mathrm{Re}(x_{ed}) = \mathrm{Re}(x_{de}) = 0$ $(d \neq e)$．同様に，$u = i(E_{de} + E_{ed}), j(E_{de} + E_{ed}), k(E_{de} + E_{ed})$ とおくと,

$$\mathrm{Re}(i(c_d x_{ed} + c_e x_{de})) = \mathrm{Re}(j(c_d x_{ed} + c_e x_{de})) = \mathrm{Re}(k(c_d x_{ed} + c_e x_{de})) = 0$$

が得られるので，$0 < c_1 < \cdots < c_m$ より，$x_{ed} = 0$ $(e \neq d)$．ゆえに，f の臨界点は $p = (\epsilon_a \delta_{ab})_{a,b}$.

次に f の臨界点 $p = (\epsilon_a \delta_{ab})_{a,b}$ における指数を求める．$u, v \in \mathfrak{sp}(m)$ に対し,

$$(Hf)_p(u,v) = \mathrm{Re}(\sum_a \epsilon_a c_a (uv)_a a) \quad \text{特に} \quad (Hf)_p(u,u) = \mathrm{Re}(\sum_a \epsilon_a c_a (u^2)_a a)$$

$u = iE_{aa}, jE_{aa}, kE_{aa}$ のとき，$u^2 = -E_{aa}$ より，$(Hf)_p(u,u) = -\epsilon_a c_a$. $u = E_{ab} - E_{ba}, i(E_{ab} + E_{ba}), j(E_{ab} + E_{ba}), k(E_{ab} + E_{ba})$ $(a \neq b)$ のとき，$u^2 = -(E_{aa} + E_{bb})$ より，$(Hf)_p(u,u) = -(\epsilon_a c_a + \epsilon_b c_b)$．$u = i(E_{ab} + E_{ba}), v = j(E_{cd} + E_{dc})$ 等の場合には，$(Hf)_p(u,v) = 0$ となるので，Hesse 行列は対角行列であり，指数の公式が得られる． □

例 3.19. [特殊ユニタリー群 $SU(m)$ 上の Morse 関数] $0 < c_1 < \cdots < c_m$ とする．$SU(m)$ 上の C^∞ 級関数 $f : SU(m) \to \mathbb{R}$ を

$$f(p) = \mathrm{Re}(\sum_{i=1}^{m} c_i z_{ii}) \qquad (p = (z_{ij}) \in SU(m))$$

と定める．ユニタリー群の場合の計算と同様にして，$p \in SU(m)$ が f の臨界点ならば，p は対角行列 $p = (z_i\delta_{ij})_{i,j}$ であることがわかる．

$$u_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \quad v_{ij} = \sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji}), \quad w_i = \sqrt{-1}(E_{11} - E_{i+1,i+1})$$

とおくと，$\{u_{ij}, v_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ は，$\mathfrak{su}(m)$ の基底である．

補題 3.20. $p = (z_i\delta_{ij})_{i,j}$ が f の臨界点であるための必要十分条件は，$c_i\mathrm{Im}(z_i) = c_j\mathrm{Im}(z_j)$ が成り立つことである．このとき，

$$\begin{aligned}
&(Hf)_p(u_{ij}, u_{kl}) = (Hf)_p(v_{ij}, v_{kl}) = -\delta_{ik}\delta_{jl}\mathrm{Re}(c_i z_i + c_j z_j) \quad (i < j, k < l),\\
&(Hf)_p(w_i, w_j) = -\mathrm{Re}(c_1 z_1 + c_{i+1} z_{i+1}\delta_{ij}),\\
&(Hf)_p(u_{ij}, v_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}\mathrm{Re}(\sqrt{-1}(c_i z_i - c_j z_j)) \quad (i < j, k < l),\\
&(Hf)_p(u_{ij}, w_k) = (Hf)_p(v_{ij}, w_k) = 0
\end{aligned}$$

証明．$X = \sqrt{-1}(E_{ii} - E_{jj}) \in \mathfrak{su}(m)$ に対し，$(pX)_{ll} = \sqrt{-1}(z_i\delta_{il} - z_j\delta_{jl})$．これを用いて，

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} f(p \exp tX) = \mathrm{Re}(\sum c_l (pX)_{ll}) = -c_i\mathrm{Im}(z_i) + c_j\mathrm{Im}(z_j)$$

ゆえに前半の主張が得られる．Hf の計算は (3.24) と同様にして得られる． □

補題 3.21. c_1 に比べて c_i $(i \geq 2)$ が十分大きい ($c_i \geq 3(m-1)c_1$) とき，$p \in SU(m)$ が f の臨界点であるための必要十分条件は，

$$p = (\epsilon_i\delta_{ij}),\ \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_m = 1$$

となることである．このとき，

$$\begin{aligned}
&(Hf)_p(u_{ij}, u_{kl}) = (Hf)_p(v_{ij}, v_{kl}) = -\delta_{ik}\delta_{jl}(c_i\epsilon_i + c_j\epsilon_j) \quad (i < j, k < l),\\
&(Hf)_p(w_i, w_j) = -(c_1\epsilon_1 + c_{i+1}\epsilon_{i+1}\delta_{ij}) \quad (1 \leq i \leq m-1),\\
&(Hf)_p(u_{ij}, v_{kl}) = (Hf)_p(u_{ij}, w_k) = (Hf)_p(v_{ij}, w_k) = 0
\end{aligned}$$

証明．前補題から，p が f の臨界点であるための条件は，

$$p=(e^{\sqrt{-1}\theta_i}\delta_{ij}),\quad c_1\sin\theta_1=c_i\sin\theta_i,\quad \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\in 2\pi\mathbb{Z}$$

特に，

$$c_1|\sin\theta_1|=c_i|\sin\theta_i|,\quad \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\in \pi\mathbb{Z} \tag{3.25}$$

が成り立つ．(3.25) を用いて，$\sin\theta_1=\sin\theta_2=\cdots=\sin\theta_m=0$ を示せばよい．そのためには $\sin\theta_1=0$ を示せば十分である．条件 (3.25) は θ_i を $\theta_i+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ で置き換えても変わらないので $|\theta_i|\le\pi/2$ と仮定して一般性を失わない．(3.25) を用いて，

$$c_i|\sin\theta_1|\ge 3(m-1)c_1|\sin\theta_1|=3(m-1)c_i|\sin\theta_i|$$

両辺を c_i で割り，

$$\frac{3}{2}(m-1)|\theta_i|\le 3(m-1)|\sin\theta_i|\le|\sin\theta_1|\le|\theta_1|$$

よって

$$|\theta_i|\le\frac{2}{3(m-1)}|\theta_1|\le\frac{\pi}{3(m-1)}$$

これを用いて，

$$-\frac{5}{6}\pi\le\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\le\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$$

(3.25) と合わせて，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m=0, \theta_2+\cdots+\theta_m=-\theta_1$．よって，

$$|\theta_1|\le|\theta_2|+\cdots+|\theta_m|\le\frac{2}{3}|\theta_1|$$

となり，$\theta_1=0, \sin\theta_1=0$ が得られた．

Hf の計算は前補題から直ちに得られる． □

補題 3.13 の証明と同様にして，c_i が適切な条件を満たすとき，f が Morse 関数となることが示される．$\{i_1<\cdots<i_q\}=\{i\mid\epsilon_i=1\}$ とおく．

命題 3.22. Morse 関数 f の臨界点 $p=(\epsilon_i\delta_{ij})$，$\epsilon_i=\pm1, \epsilon_1\cdots\epsilon_m=1$ における指数は

$\epsilon_1=1$ のとき，$(2i_2-1)+\cdots+(2i_q-1)$.

$\epsilon_1=-1$ のとき，$(2i_1-1)+(2i_2-1)+\cdots+(2i_q-1)\ge 3$.

証明．点 p における Hesse 行列は

$$(HF)_p = \begin{pmatrix} (Hf)_p(u_{ij}, u_{kl}) & & \\ & (Hf)_p(v_{ij}, v_{kl}) & \\ & & (Hf)_p(w_i, w_j) \end{pmatrix}$$

ここで，行列 $H := ((Hf)_p(w_i, w_j))$ は

$$H = \begin{pmatrix} -(c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2) & -c_1\epsilon_1 & \cdots & -c_1\epsilon_1 \\ -c_1\epsilon_1 & -(c_1\epsilon_1 + c_3\epsilon_3) & \cdots & -c_1\epsilon_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -c_1\epsilon_1 & \cdots & \cdots & -(c_1\epsilon_1 + c_m\epsilon_m) \end{pmatrix}$$

c_1 に比べて c_i $(i \geq 2)$ が大きいとき，行列 H の負の固有値の数は対角行列

$$\begin{pmatrix} -c_2\epsilon_2 & & & \\ & -c_3\epsilon_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -c_m\epsilon_m \end{pmatrix}$$

の負の固有値の数 $\#\{i \mid 2 \leq i \leq m, \epsilon_i > 0\} \in \{q-1, q\}$ に等しい．補題 3.14 の計算と同様にして，指数は

$\epsilon_1 = 1$ のとき，$i_1 = 1$ だから，

$$\begin{aligned} 2(i_1 - 1) + \cdots + 2(i_q - 1) + q - 1 &= (2i_1 - 1) + \cdots + (2i_q - 1) - 1 \\ &= (2i_2 - 1) + \cdots + (2i_q - 1) \end{aligned}$$

$\epsilon_1 = -1$ のとき，

$$2(i_1 - 1) + \cdots + 2(i_q - 1) + q = (2i_1 - 1) + \cdots + (2i_q - 1)$$

♡ w_i を適切に選んで，H を対角行列にするような証明も試みたが，このような証明をしようとすると w_i の置き方を $p = (\epsilon_i\delta_{ij})$ に依存して変更せねばならず，私には出来なかった．♡ □

[参考] Morse 関数の臨界点の個数について以下の定理 3.23 が知られている．

定理 3.23. M を compact C^∞ 級多様体とする．M 上の Morse 関数 f の臨界点の個数の偶奇は f の取り方によらない．

証明については [2] を参照.

[参考] compact 多様体上にたくさんの Morse 関数が存在することが知られている：

$C^\infty(M)$ 上に適切な位相 (C^2-近似) を入れるとき，次が成り立つ.

定理 3.24. [5]M を compact C^∞ 級多様体とする．M 上の Morse 関数全体は，$C^\infty(M)$ の稠密な開集合である.

上の定理は，(i) [稠密性] 任意の C^∞ 級関数の（C^2 近似の意味で）どんな近くにも Morse 関数があり (問題 1.3 も参照)，(ii) [開集合] 任意の Morse 関数の近くの関数はすべて Morse 関数であることを主張している. (i) の証明には，Sard の定理を用いる．(ii) は問題 4.8 の結果から，成り立つことが推察される.

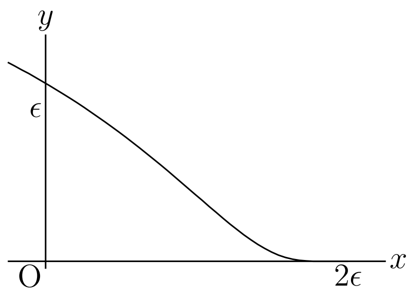
3.2 Morse 理論の基本定理

この節の目的は Morse の基本定理 (定理 3.33) を示すことである.

後に必要になる補題を準備しておく.

補題 3.25. $\epsilon > 0$ に対し，次の条件を満たす C^∞ 級関数 $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する:

$$\begin{aligned}
&\mu(0) > \epsilon, \\
&\mu(x) \geq 0, \quad (x \in \mathbb{R}), \\
&-1 < \mu'(x) \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \\
&\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \mu'(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 2\epsilon
\end{aligned}$$



証明. $C > 0, k > 0$ に対し，0 以上の値をとる関数 $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{k}{x-2\epsilon}\right) & (x < 2\epsilon), \\ 0 & (x \geq 2\epsilon) \end{cases}$$

と定めると μ は C^∞ 級になる．明らかに，$\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 2\epsilon$．導関数は

$$\mu'(x) = \begin{cases} -\frac{Ck}{(x-2\epsilon)^2} \exp\left(\frac{k}{x-2\epsilon}\right) & (x < 2\epsilon), \\ 0 & (x \geq 2\epsilon) \end{cases}$$

となるので，$\mu'(x) \leq 0$ であり，$\mu'(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 2\epsilon$．残りの条件が満たされるように C, k を定める．$\mu(0) = C\exp\left(-\frac{k}{2\epsilon}\right)$ より，

$$\mu(0) > \epsilon \Leftrightarrow C\exp\left(-\frac{k}{2\epsilon}\right) > \epsilon \Leftrightarrow C > \epsilon\exp\left(\frac{k}{2\epsilon}\right)$$

第二次導関数は

$$\mu''(x) = \begin{cases} \frac{Ck}{(x-2\epsilon)^3}\left(2 + \frac{k}{x-2\epsilon}\right)\exp\left(\frac{k}{x-2\epsilon}\right) & (x < 2\epsilon), \\ 0 & (x \geq 2\epsilon) \end{cases}$$

$x < 2\epsilon$ のとき，$\mu''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{x-2\epsilon} = -2 \Leftrightarrow x = 2\epsilon - \frac{k}{2}$．増減表は

x	$\cdots$	$2\epsilon - \frac{k}{2}$	$\cdots$	2ϵ
$\mu''(x)$	$-$	0	$+$	
$\mu'(x)$	$\nearrow$	最小	$\searrow$	

$\mu'(2\epsilon - \frac{k}{2}) = -\frac{4C}{k}e^{-2}$ だから，

$$-1 < \mu'(x)\ (x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow -1 < \mu'(2\epsilon - \frac{k}{2}) \Leftrightarrow 1 > \frac{4C}{k}e^{-2}$$

よって，k, C の満たすべき条件は

$$\epsilon\exp\left(\frac{k}{2\epsilon}\right) < C < \frac{k}{4}e^2$$

$k = 2\epsilon$ とおく．$2 < e$ より $\epsilon e < \frac{\epsilon}{2}e^2$．よって，$\epsilon e < C < \frac{\epsilon}{2}e^2$ と C をとればよい． $\square$

たとえば，$\epsilon = 1/2$ のときは，$k = 1, C = 8/5$ とおくと，条件を満たす．このとき，

$$\mu(x) = \begin{cases} 1.6\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) & (x < 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

問題 3.6. 補題 3.25 の関数 μ に対し，

$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 + \mu(x_1^2 + 2x_2^2) = \epsilon\}$$

とおく．次を示せ．

(1) $(x_1, x_2) \in D \Rightarrow (-x_1, x_2), (x_1, -x_2), (-x_1, -x_2) \in D$

(2) $b>0$ が一意に存在して，$(0,b)\in D$

(3) 陰関数定理により，$x_1=0$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 $g(x_1)$ を $g(0)=b, x_1^2-g(x_1)^2+\mu(x_1^2+2g(x_1)^2)=\epsilon$ で定めることができる．このとき，$g(x_1)$ は偶関数である．さらに，$x_1>0$ のとき，$g(x_1)$ は単調増加である．

定理 3.26. M を m 次元 compact C^∞ 級多様体とする．C^∞ 級関数 $f: M\to\mathbb{R}$ は，ある閉区間 $[a,b]$ に対して，$M_a^b := f^{-1}[a,b]$ 上に臨界点をもたないとする．$f^{-1}(a)\neq\emptyset, f^{-1}(b)\neq\emptyset$ と仮定する．このとき，

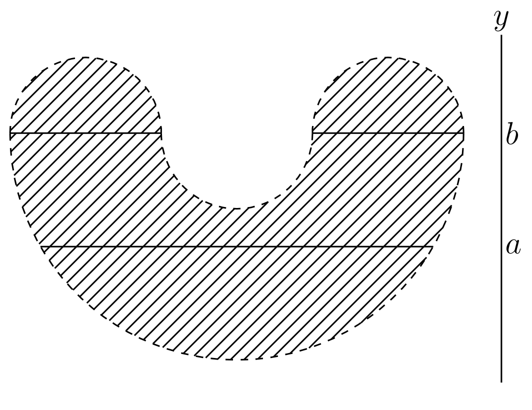
(1) $f^{-1}(a)$ と $f^{-1}(b)$ は C^∞ 級微分同型である．

(2) $M^a=f^{-1}(-\infty,a]$ と $M^b=f^{-1}(-\infty,b]$ は C^∞ 級微分同型である．

(3) M^a は M^b の変位レトラクトである．

(4) M_a^b と $f^{-1}(a)\times[a,b]$ は C^∞ 級微分同型である．

[注意] 上の定理から compact という仮定をはずした主張は成り立たない．このような例をあげよう．$\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数を $f(x,y)=y$ と定めると，$\frac{\partial f}{\partial y}=1\neq 0$ だから，各点 p で $(df)_p\neq 0$．O を $\mathbb{R}^2$ の空でない開集合とすると，f の O への制限は C^∞ 級で，各点 $p\in O$ で $(df)_p\neq 0$．O として下図のような開集合を考えると，O は compact ではない (定理 1.16)．ある点 a の逆像 $f^{-1}(a)$ は弧状連結であり，他の点 b の逆像 $f^{-1}(b)$ は弧状連結にならないので $f^{-1}(a)$ と $f^{-1}(b)$ は位相同型にならない．



例 3.6 のような種数 g の向き付け可能な閉曲面から，一点を取り除いて得られる曲面とその高さ関数も反例になる．

[注意] f は $M_a^b := f^{-1}[a,b]$ 上に臨界点をもたないので，定理 2.49 より，$f^{-1}(a), f^{-1}(b)$ は M の $(m-1)$ 次元部分多様体である．

証明の方針. f の増加方向を向くベクトル場 X を考える. X の定める 1 径数変換群 φ_t から求める微分同型写像やレトラクションが構成できる. $\square$

証明. (A) $V := \{x \in M \mid (df)_x \neq 0\}$ は M の開集合で, $M_a^b \subset V$. M は compact だから, M 上には Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する (定理 2.30, 例 1.22).

V の各点 x で $(\mathrm{grad} f)_x \neq 0$ だから, V 上のベクトル場 X を

$$X := \frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|^2}$$

で定められる. このとき,

$$(df)(X) = \langle \mathrm{grad} f, X\rangle = \left\langle \mathrm{grad} f, \frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|^2}\right\rangle = 1$$

X の生成する局所 1 径数変換群を φ_t と表す. このとき,

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) = X_{\varphi_t(p)} f = (df)_{\varphi_t(p)} X = 1$$

だから, 積分して

$$f(\varphi_t(p)) = f(p) + t$$

この後, 多少不備があるが方針のわかりやすい証明を与え, 次に厳密な証明を与える. $\square$

証明の続き (荒いもの). **M は compact だから, X は完備である, と言いたいところだが, X は M 上のベクトル場ではなく, V 上のベクトル場なので, 一般にはこうはいかない. しかし, X は完備, すなわち, φ_t における t の動く範囲が $(-\infty, \infty)$ だとしてひとまず話を進めてみる.**

(1) $\varphi_{b-a} : f^{-1}(a) \to f^{-1}(b)$ は微分同型写像になる. 逆写像は $\varphi_{a-b} : f^{-1}(a) \to f^{-1}(b)$ である.

(2) $\varphi_{b-a} : M^a \to M^b$ は微分同型写像になる. 逆写像は $\varphi_{a-b} : M^b \to M^a$ である.

(3) $r : M^b \times [0,1] \to M^b; (x,t) \mapsto \varphi_{t(a-b)}(x)$ を

$$r(p,t) = \begin{cases} p & (p \in M^a), \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p) & (p \in M_a^b) \end{cases}$$

と定める. r が M^a の M^b における変位レトラクションになることを示す. $M^a \cap M_a^b = f^{-1}(a) \ni p$ に対し, $\varphi_{t(a-f(p))}(p) = \varphi_0(p) = p$ だから, r は連続である.

• $r(p,0)=\varphi_0(p)=p$
• $r(p,1)=\varphi_{a-b}(p)\in M^a$ ((2) より)
• $p\in M^a$ のとき，$r(p,t)=p$.
ゆえに主張が示された.
(4) 二つの写像

$$
\begin{aligned}
&k: f^{-1}(a)\times[a,b]\to M_a^b; (x,t)\mapsto\varphi_{t-a}(x),\\
&h: M_a^b\to f^{-1}(a)\times[a,b]; p\mapsto(\varphi_{a-f(p)}(p), f(p))
\end{aligned}
$$

が互いに逆写像になることを言えばよい.

$$
\begin{aligned}
hk(x,t)&=h(\varphi_{t-a}(x)) \quad (k\text{ の定義})\\
&=(\varphi_{a-f(\varphi_{t-a}(x))}(\varphi_{t-a}(x)), f(\varphi_{t-a}(x)) \quad (h\text{ の定義})\\
&=(\varphi_{a-t}(\varphi_{t-a}(x)),t) \qquad (f(\varphi_{t-a}(x))=f(x)+t-a=t)\\
&=(x,t),\\
kh(p)&=k(\varphi_{a-f(p)}(p), f(p)) \quad (h\text{ の定義})\\
&=\varphi_{f(p)-a}(\varphi_{a-f(p)}(p)) \quad (k\text{ の定義})\\
&=p
\end{aligned}
$$

以上で主張が示された. □

上の証明には不備があったので，修正した証明を与える.

証明の続き (厳密なもの). C^∞ 級関数 $h: M\to\mathbb{R}$ を $0\le h(p)\le 1$ かつ

$$
h(p)=\begin{cases}1 & (p\in M_a^b),\\ 0 & (p\notin V)\end{cases}
$$

を満たすようにとれる. このとき,

(B) M 上の C^∞ 級ベクトル場 X で $(df)(X)=h$ となるものが存在する.

V 上で $\|\mathrm{grad}\ f\|^2>0$ だから，M 上の C^∞ 級ベクトル場 X を次で定められる：

$$
X=\begin{cases} h\frac{\mathrm{grad}\ f}{\|\mathrm{grad}\ f\|^2} & (V\text{ 上}),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}
$$

このとき,

$$
(df)(X)=\langle \mathrm{grad}\ f, X\rangle=\left\{\begin{array}{ll} h & (V\text{ 上}),\\ 0 & (\text{その他})\end{array}\right\}=h
$$

よって，この X が求めるものである．

M は compact だから，X は完備である (定理 2.26)．$c(t)$ を X の積分曲線とすると，パラメーター t の動く範囲は実数全体 $\mathbb{R}$ になる．このとき，

$$\frac{d}{dt}f(c(t)) = \dot{c}f = (df)_{c(t)}(X) = h(c(t))$$

両辺を 0 から t まで積分して，

$$f(c(t)) - f(c(0)) = \int_0^t h(c(s))ds$$

X の定める 1 径数変換群を φ_t と表す．微分同型写像 $\varphi_{b-a} = \varphi_{a-b}^{-1}$ で $f^{-1}(a)$ と $f^{-1}(b)$ が移り合うことを言えばよい．$\varphi_0(p) = p$ だから，

$$f(\varphi_t(p)) = \int_0^t h(\varphi_s(p))ds + f(p) \tag{3.26}$$

これより，次が従う．

(a) $\varphi_s(p) \in M_a^b$ $(s \in [0,t])$ ならば，$h(\varphi_s(p)) = 1$ だから，

$$f(\varphi_t(p)) = t + f(p)$$

(b) $0 \leq h \leq 1$ だから，$t \geq 0$ ならば，

$$f(p) \leq f(\varphi_t(p)) \leq t + f(p)$$

(c) $0 \leq h \leq 1$ だから，$t \leq 0$ ならば，

$$f(p) \geq f(\varphi_t(p)) \geq t + f(p)$$

(1) (b) で $p \in f^{-1}(a), 0 \leq t \leq b-a$ とすると，$a \leq f(\varphi_t(p)) \leq t+a \leq b$. よって，$\varphi_t(p) \in M_a^b$．$t = b-a$ とおくと，(a) より，$f(\varphi_{b-a}(p)) = (b-a)+a = b$．よって，$\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) \subset f^{-1}(b)$.

(c) で $p \in f^{-1}(b), 0 \geq t \geq a-b$ とすると，$b \geq f(\varphi_t(p)) \geq t+b \geq a$．よって，$\varphi_t(p) \in M_a^b$. $t = a-b$ とおくと，(a) より，$f(\varphi_{b-a}(p)) = (a-b)+b = a$. よって，$\varphi_{b-a}(f^{-1}(b)) \subset f^{-1}(a)$.

以上より，$\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b), \varphi_{b-a}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(a)$．よって，(1) が得られた.

(2) $\varphi_{b-a}(M^a) \subset M^b, \varphi_{a-b}(M^b) \subset M^a$ を示せばよい.

$p \in M^a$ とする．(b) より，$f(\varphi_{b-a}(p)) \leq (b-a)+f(p) \leq (b-a)+a = b$．よって，$\varphi_{b-a}(M^a) \subset M^b$．

次に $\varphi_{a-b}(M^b) \subset M^a$ を示す．まず，$M^b = M^a \cup M^b_a$ に注意する．$p \in M^a$ とすると，(c) より，$a \geq f(p) \geq f(\varphi_{a-b}(p))$．よって，$\varphi_{a-b}(M^a) \subset M^a \subset M^b$．

最後に，$\varphi_{a-b}(M^b_a) \subset M^a$ を示す．

$p \in M^b_a$ とする．$a-f(p) \leq t \leq 0$ を満たす任意の t について，$\varphi_t(p) \in M^b_a$ となることをまず示す．(c) より，$b \geq f(p) \geq f(\varphi_t(p)) \geq t + f(p) \geq a$．よって，$\varphi_t(p) \in M^b_a$．このとき，(a) より，$a-f(p) \leq t \leq 0$ を満たす任意の t について，$f(\varphi_t(p)) = t+f(p)$．$t = a-f(p)$ とおくと，$f(\varphi_{a-f(p)}(p)) = a$．ゆえに，

$$(d) \qquad \varphi_{a-f(p)}(p) \in f^{-1}(a) \subset M^a.$$

このことと $f(p) - b \leq 0$ を用いて，

$$\varphi_{a-b}(p) = \varphi_{f(p)-b}(\varphi_{a-f(p)}(p)) \in \varphi_{f(p)-b}(M^a) \subset M^a \quad (\text{(c) より})$$

よって，$\varphi_{a-b}(M^b_a) \subset M^a$ が得られ，(2) が示された．

(3) 写像 $r : M^b \times I \to M^b = M^a \cup M^b_a$ を

$$r(p,t) = \begin{cases} p & (p \in M^a), \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p) & (p \in M^b_a) \end{cases}$$

と定める．r が M^a の M^b における変位レトラクションになることを示す．まず，$r(M^b \times I) \subset M^b$ を確認しておく．$(p,t) \in M^b_a \times I$ とすると，(c) より

$$b \geq f(p) \geq f(\varphi_{t(a-f(p))}(p)) \geq t(a-f(p)) + f(p) \geq (a-f(p)) + f(p) = a$$

よって，$\varphi_{t(a-f(p))}(p) \in M^b_a$．このとき，(b) より $f(\varphi_{t(a-f(p))}(p)) = t(a-f(p)) + f(p)$ となるから，$t = 1$ とおき，$\varphi_{a-f(p)}(p) \in f^{-1}(a)$．次に r が連続となることを示す．$p \in M^a \cap M^b_a = f^{-1}(a)$ のとき，$\varphi_{t(a-f(p))}(p) = \varphi_0(p) = p$ となるから，r は連続である．r の定義より

$$\begin{aligned} &r(p,0) = p, \\ &r(p,1) = \begin{cases} p & (p \in M^a), \\ \varphi_{a-f(p)}(p) \in f^{-1}(a) \subset M^a & (p \in M^b_a) \end{cases} \\ &r(p,t) = p \qquad (p \in M^a) \end{aligned}$$

よって，M^a は M^b の変位レトラクトである．

(4) C^∞ 級写像 $h: M \to M \times \mathbb{R}, k: M \times \mathbb{R} \to M$ を

$$\begin{aligned}
&h: M \to M \times \mathbb{R}; p \mapsto (\varphi_{a-f(p)}(p), f(p)),\\
&k: M \times \mathbb{R} \to M; (p, t) \mapsto \varphi_{t-a}(p)
\end{aligned}$$

と定める．(d) と (b) より

$$\begin{aligned}
&h|M_a^b : M_a^b \to f^{-1}(a) \times [a, b] && \text{((d) より)},\\
&k|(f^{-1}(a) \times [a, b]) : f^{-1}(a) \times [a, b] \to M_a^b && \text{((b) より)}
\end{aligned}$$

これらが互いに逆写像になることを示せばよい．$p \in M_a^b$ に対し，

$$(kh)(p) = k(\varphi_{a-f(p)}(p), f(p)) = \varphi_{f(p)-a}\varphi_{a-f(p)}(p) = p$$

$(p, t) \in f^{-1}(a) \times [a, b]$ に対し，

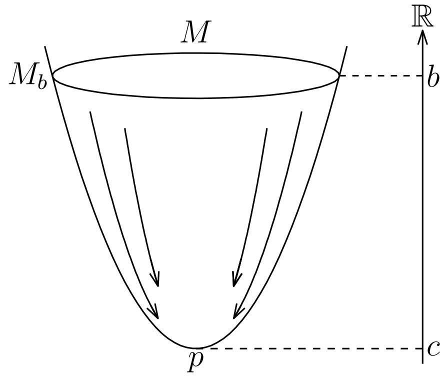
$$\begin{aligned}
(hk)(p, t) &= h(\varphi_{t-a}(p)) && (k \text{ の定義})\\
&= (\varphi_{a-f(\varphi_{t-a}(p))}(\varphi_{t-a}(p)), f(\varphi_{t-a}(p))) && (h \text{ の定義})\\
&= (\varphi_{t-f(\varphi_{t-a}(p))}(p), f(\varphi_{t-a}(p)))
\end{aligned}$$

(b) より

$$a = f(p) \leq f(\varphi_{t-a}(p)) \leq (t-a) + f(p) = t \leq b$$

よって，$\varphi_{t-a}(p) \in M_a^b$．(a) より，$f(\varphi_{t-a}(p)) = (t-a) + f(p) = t$．これを用いて，$(hk)(p, t) = (\varphi_0(p), t) = (p, t)$．以上で主張が示された．　$\square$

命題 3.27. M を m 次元 compact C^∞ 級多様体とする．Morse 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ は $p \in M$ で最小値 $c = f(p)$ をとるとする．$b > c$ となる実数 b が存在して，$M^b = f^{-1}(-\infty, b]$ に f の臨界点は p 以外にないとする．このとき，1 点 e^0 は M^b の変位レトラクトになる．



証明の方針．$\epsilon > 0$ を $c < c + \epsilon < b$ ととる．仮定より，f は $f^{-1}[c+\epsilon, b] = M^b_{c+\epsilon}$ 上に臨界点をもたない．定理 3.26, (3) より，$M^{c+\epsilon}$ は M^b の変位レトラクトである．e^0 が $M^{c+\epsilon}$ の変位レトラクトであることが示せれば，補題 1.36 より，e^0 は M^b の変位レトラクトになる．

Morse の補題より，p のまわりの座標近傍 $(U; \varphi, x_1, \cdots, x_m)$ が存在して，$x_i(p) = 0$ かつ $f(x) = c + \|x\|^2$．$\epsilon > 0$ が存在して，$c + \epsilon < b$ かつ

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < \epsilon\} \subset \varphi(U)$$

ここで，$\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < \epsilon\}$ は開集合だから，$U := \varphi^{-1}\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < \epsilon\}$ とおき直すと，$\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < \epsilon\} = \varphi(U)$．$x \in \varphi(U)$ に対し，$f(x) = c + \|x\|^2 < c + \epsilon$ だから，$U \subset M^{c+\epsilon}$．$M^{c+\epsilon}$ は M の閉集合だから，$\bar{U} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 \leq \epsilon\} \subset M^{c+\epsilon}$．ここでもし，$\bar{U} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 \leq \epsilon\} = M^{c+\epsilon}$ が示せたとすると，$M^{c+\epsilon}$ は閉球となり，主張が従うが，$\bar{U} = M^{c+\epsilon}$ が成り立つことは一般には期待できない．そこで，f を多少変形した F に対して，上の考察を行い，上の議論がすべて成立するようにする． □

証明．問題 3.4, (1) の結果より，p は f の非退化臨界点で，p における f の Morse 指数は 0 になる．Morse の補題 (命題 3.3) から，p のまわりの座標近傍 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$ を $x_i(p) = 0$ かつ

$$f(x) = f(x_1, \cdots, x_m) = c + x_1^2 + \cdots + x_m^2 = c + \|x\|^2$$

となるようにとれる．$\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合で，$0 = \varphi(p) \in \varphi(U)$ だから，$\epsilon > 0$ が存在して，$c + \epsilon < b$ かつ

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < \epsilon\} \subset \varphi(U)$$

となる．補題 3.25 の条件を満たす C^∞ 級関数 $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をとる (以下では $\mu(x)$ は $x \geq 0$ の部分のみ用いる)．C^∞ 級関数 $F : M \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \mu(2\|x\|^2) & (x \in U), \\ f(x) & (x \notin U) \end{cases}$$

と定義する．

(I) $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon] = M^{c+\epsilon}$

(I) の証明. $\mu \geq 0$ だから，$F(x) \leq f(x)$．よって，$M^{c+\epsilon} \subset F^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$．逆の包含を示すために $x \in F^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$ とする．$F(x) = f(x)$ のとき，$x \in M^{c+\epsilon}$．$F(x) < f(x)$ のとき，$x \in U, \|x\|^2 < \epsilon$．このとき，$f(x) = c + \|x\|^2 < c + \epsilon$．ゆえに，$x \in M^{c+\epsilon}$ となり，逆包含も示せた． □

(II) $F : M \to \mathbb{R}$ の臨界点全体は f の臨界点全体と一致する．

(II) の証明. U の外では $F = f$ だから，U 内で考えればよい．

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - 4x_i\mu'(2\|x\|^2) = 2x_i(1 - 2\mu'(2\|x\|^2))$$

$\mu' \leq 0$ より，$1 - 2\mu'(2\|x\|^2) \geq 1 > 0$．よって，$(dF)_q = 0 \Leftrightarrow x(q) = 0 \Leftrightarrow q = p$． □

(III) $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ は $M^{c+\epsilon}$ の変位レトラクトである．

(III) の証明. (I) より $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon] = M^{c+\epsilon}$．$c + \epsilon < b$ だから，(II) より $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$ 内の F の臨界点は p のみである．$p \notin F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ を示せば，定理 3.26, (3) より主張が言える．F の定義より

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \epsilon$$

よって，$p \notin F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$． □

以上の (I) から (III) を用いて主張を示す．$x \notin U$ のとき $F(x) = f(x) \geq c$ だから，

$$\begin{aligned}
F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] &= \{x \in M \mid F(x) \leq c - \epsilon\} \\
&= \{x \in U \mid F(x) \leq c - \epsilon\} \qquad (\heartsuit \text{勝負あった} \heartsuit) \\
&= \{x \in U \mid f(x) - \mu(2\|x\|^2) \leq c - \epsilon\} \\
&= \{x \in U \mid \mu(2\|x\|^2) - \|x\|^2 \geq \epsilon\} \qquad (\heartsuit \text{決まった} \heartsuit)
\end{aligned}$$

上式の最右辺は一変数 $t = \|x\|^2$ に関する条件であることに注意する．C^∞ 級関数 g を $g(t) = \mu(2t) - t$ と定めると，$g(0) = \mu(0) > \epsilon$, $g(\epsilon) = -\epsilon < 0$. $g'(t) = 2\mu'(2t) - 1 \leq -1 < 0$．よって，$g(t)$ は単調減少関数である．中間値の定理より，ただ一つ $0 < t_0 < \epsilon$ が存在して，$g(t_0) = \epsilon$ となる．よって，

$$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] = \{x \in U \mid \|x\|^2 \leq t_0\}$$

ゆえに，$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ は $\mathbb{R}^m$ の閉球に同相である．特に一点 e^0 は $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ の変位レトラクトである．$M^{c+\epsilon}$ は M^b の変位レトラクト，$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ は $M^{c+\epsilon}$ の変位レトラクト，e^0 は $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ の変位レトラクトだから，e^0 は M^b の変位レトラクトである． □

定理 3.28. [**胞体近似定理**]X を CW 複体，$\nu : S^n \to X$ を連続写像とする．このとき，ν にホモトープな連続写像 $\nu_1 : S^n \to X$ で $\nu_1(S^n) \subset X^n$ (X^n は X の n スケルトン）となるものが存在する．

証明は [3, p. 115, 定理 3.6.5] を参照．
胞体近似定理は非常に強力であることが次の例からもわかる．

例 3.29. $n < m$ とする．連続写像 $f : S^n \to S^m$ は定値写像にホモトープである．

証明. S^n, S^m を CW 複体に分割すると $S^n = e^0 \cup e^n, S^m = e^0 \cup e^m$．$n < m$ だから S^m の n スケルトンは e^0．胞体近似定理より主張が成り立つ． □

命題 3.30. X を位相空間とする．2つの連続写像 $\nu_0, \nu_1 : S^{n-1} \to X$ がホモトープならば，X に n 次元胞体をそれぞれ ν_0, ν_1 で接着した空間 $X \cup_{\nu_0} e^n$ と $X \cup_{\nu_1} e^n$ はホモトピー同値である．

証明. $X \cup_{\nu_0} e^n$ と $X \cup_{\nu_1} e^n$ の間のホモトピー同値写像を構成すればよい．$\nu : S^{n-1} \times I \to X$ を ν_0 と ν_1 を結ぶホモトピーとする：$\nu(s, 0) =$

$\nu_0(s), \nu(s,1) = \nu_1(s)$．$\nu(s,t) = \nu_t(s)$ と書く．写像 $\tilde{k} : X \cup V^n \to X \cup_{\nu_1} e^n$ を

$$\begin{aligned}
&\tilde{k}(x) = x \qquad (x \in X),\\
&\tilde{k}(v) = \begin{cases} 2v & (0 \le \|v\| \le 1/2, v \in V^n),\\ \nu_{2-2\|v\|}(v/\|v\|) & (1/2 \le \|v\| \le 1, v \in V^m) \end{cases}
\end{aligned}$$

と定義すると，$\tilde{k}$ は連続である．実際，$\|v\| = 1/2$ のとき，$\nu_{2-2\|v\|}(v/\|v\|) = \mu_1(2v)$ と $2v$ は $X \cup_{\nu_1} e^n$ 上で一致するからである．$2 - 2\|v\| = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 1 \Leftrightarrow v \in S^{n-1}$．このとき，

$$\begin{aligned}
\tilde{k}(v) &= \nu_0(v) \in X\\
&= \tilde{k}(\nu_0(v))
\end{aligned}$$

となるから，$\tilde{k}$ は写像

$$\begin{aligned}
&k : X \cup_{\nu_0} e^n \to X \cup_{\nu_1} e^n,\\
&x \mapsto x \quad (x \in X),\\
&v \mapsto \begin{cases} 2v & (0 \le \|v \le 1/2),\\ \nu_{2-2\|v\|}(v/\|v\|) & (1/2 \le \|v\| \le 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

を引き起こす．$\tilde{k}$ は連続だから，k も連続である．同様に連続写像 $l : X \cup_{\nu_1} e^n \to X \cup_{\nu_0} e^n$ を

$$\begin{aligned}
&l : X \cup_{\nu_1} e^n \to X \cup_{\nu_0} e^n,\\
&x \mapsto x \quad (x \in X),\\
&v \mapsto \begin{cases} 2v & (0 \le \|v \le 1/2),\\ \nu_{2\|v\|-1}(v/\|v\|) & (1/2 \le \|v\| \le 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

と定める．k, l がホモトピー同値写像であることを示す．$lk : X \cup_{\nu_0} e^n \to X \cup_{\nu_0} e^n$ は

$$\begin{aligned}
&lk : X \cup_{\nu_0} e^n \to X \cup_{\nu_0} e^n,\\
&x \mapsto x \quad (x \in X),\\
&v \mapsto \begin{cases} 4v & (0 \le \|v\| \le 1/4),\\ \nu_{4\|v\|-1}(v/\|v\|) & (1/4 \le \|v\| \le 1/2),\\ \nu_{2-2\|v\|}(v/\|v\|) & (1/2 \le \|v\| \le 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．写像 $F:(X\cup_{\nu_0}e^n)\times I\to X\cup_{\nu_0}e^n$ を

$$
\begin{aligned}
&F(x,t)=x \qquad (x\in X),\\
&F(v,t)=\begin{cases}(4-3t)v & (0\le\|v\|\le\frac{1}{4-3t}),\\ \nu_{(4-3t)\|v\|-1}(v/\|v\|) & (\frac{1}{4-3t}\le\|v\|\le\frac{2-t}{4-3t}),\\ \nu_{\frac{1}{2}(4-3t)(1-\|v\|)}(v/\|v\|) & (\frac{2-t}{4-3t}\le\|v\|\le 1)\end{cases}
\end{aligned}
$$

と定めると，F は連続で，lk と 1 を結ぶホモトピーになる．同様に，kl と 1 を結ぶホモトピーも構成できる． □

命題 3.31. X,Y をホモトピー同値な 2 つの位相空間とし，$f:X\to Y$ をそのホモトピー同値写像とする．このとき，X,Y に n 次元胞体 e^n をそれぞれ連続写像 $\nu:S^{n-1}\to X, f\nu:S^{n-1}\to Y$ で接着した空間はホモトピー同値である：

$$X\cup_\nu e^n\simeq Y\cup_{f\nu}e^n$$

証明. $X\cup_\mu e^n$ と $Y\cup_{f\nu}e^n$ の間のホモトピー同値写像を構成する：連続写像 $F:X\cup_\mu e^n\to Y\cup_{f\nu}e^n$ を

$$F(x)=x\quad(x\in X),\qquad F(v)=v\quad(v\in V^n)$$

と定める．f の逆ホモトピー同値写像を $g:Y\to X$ とする：$fg\simeq 1_Y, gf\simeq 1_X$．連続写像 $G:Y\cup_{f\nu}e^n\to X\cup_{gf\nu}e^n$ を

$$G(y)=g(y)\quad(y\in Y),\qquad G(v)=v\quad(v\in V^n)$$

と定義する．gf と 1_X はホモトープだから，gf と 1_X を結ぶホモトピー $h:X\times I\to X$ が存在する．このとき，$h\nu:S^{n-1}\times I\to X$ は $gf\nu$ と ν を結ぶホモトピーになる (補題 1.26, (1))．次の写像 $k:X\cup_{gf\nu}e^n\to X\cup_\nu e^n$ はホモトピー同値写像になる (命題 3.30).

$$
\begin{aligned}
&h(x)=x\quad(x\in X),\\
&h(v)=\begin{cases}2v & (v\in V^n, 0\le\|v\|\le 1/2),\\ h_{2-2\|v\|}\nu(v/\|v\|) & (v\in V^n, 1/2\le\|v\|\le 1)\end{cases}
\end{aligned}
$$

$kGF\simeq 1$ を示す：実際，$kGF:X\cup_\nu e^n\to X\cup_\nu e^n$ は

$$
\begin{aligned}
&x\mapsto g(f(x))\quad(x\in X),\\
&v\mapsto\begin{cases}2v & (v\in V^n, 0\le\|v\|\le 1/2),\\ h_{2-2\|v\|}\nu(v/\|v\|) & (v\in V^n, 1/2\le\|v\|\le 1)\end{cases}
\end{aligned}
$$

次の連続写像 $H : (X \cup_\nu e^n) \times I \to X \cup_\nu e^n$ は kGF と 1 を結ぶホモトピーになる：

$$H(x,t) = h_t(x) \quad (x \in X),$$
$$H(v,t) = \begin{cases} \frac{2}{1+t} & (v \in V^n, 0 \leq \|v\| \leq \frac{1+t}{2}), \\ h_{2-2\|v\|+t}\nu(v/\|v\|) & (v \in V^n, \frac{1+t}{2} \leq \|v\| \leq 1) \end{cases}$$

よって，

$$kGF \simeq 1$$

これは kG が F の左ホモトピー逆写像になることを示している．同様に，G も左ホモトピー逆写像をもつことが示される．k はホモトピー同値志やうなので左ホモトピー逆写像をもつ．GF は k の右ホモトピー逆写像なので，GF は k の左ホモトピー逆写像でもある（補題 1.28）:

$$G(Fk) = (GF)k \simeq 1$$

G は右ホモトピー逆写像 Fk と左ホモトピー逆写像をもつので，Fk は G のホモトピー逆写像になる（補題 1.28）: $F(kG) = (Fk)G \sim 1$ よって，F は kG のホモトピー逆写像になる． □

次の定理は命題 3.27 の拡張である．

定理 3.32. M を compact C^∞ 級多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．ある閉区間 $[a,b]$ に対し，$M_a^b = f^{-1}[a,b]$ の中にただ一つの f の臨界点 p_0 が存在して，$a < f(p_0) < b$ とする．また，p_0 は非退化臨界点でその指数を r とする．このとき，$M^b = f^{-1}(-\infty,b]$ は M^a に r 次元胞体 E^r をある連続写像により接着した空間 $M^a \cup_\nu E^r$ にホモトピー同値である．

証明．$c := f(p_0)$ とおく．Morse の補題 (命題 3.3) より，p_0 のまわりの座標近傍 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m)$ を $x_i(p_0) = 0$ かつ

$$f(x_1,\cdots,x_m) = c - \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \sum_{j=r+1}^{m} x_j^2 = c - \xi + \eta$$

を満たすようにとれる．ただし，$\xi = \sum_{i=1}^{r} x_i^2, \eta = \sum_{j=r+1}^{m} x_j^2$．$\epsilon > 0$ を十分小さく取り，次の (1), (2) を満たすようにできる．

(1) $M_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} = f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ には p_0 以外の臨界点を含まない．

(2) $\{x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|^2\le 2\epsilon\}\subset\varphi(U)$

C^∞ 級関数 $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を補題 3.25 のようにとり，C^∞ 級関数 $F:M\to\mathbb{R}$ を

$$F(p)=\begin{cases} f(p)-\mu(\xi(p)+2\eta(p)) & (p\in U),\\ f(p) & (p\notin U)\end{cases}$$

で定める．このとき，$F(p)\le f(p)$ である．これより，任意の $d\in\mathbb{R}$ について，$M^d\subset F^{-1}(-\infty,d]$ が成り立つ．

(I) $F^{-1}(-\infty,c+\epsilon]=M^{c+\epsilon}$

(I) の証明. $p\in F^{-1}(-\infty,c+\epsilon]$ とする．$F(p)=f(p)$ のとき，$p\in M^{c+\epsilon}$. $F(p)<f(p)$ のとき，$p\in U,\xi(p)+2\eta(p)<2\epsilon$. このとき，

$$f(p)=c-\xi+\eta\le c+\frac{1}{2}(\xi+2\eta)<c+\epsilon \tag{3.27}$$

ゆえに，$p\in M^{c+\epsilon}$. よって，$F^{-1}(-\infty,c+\epsilon]\subset M^{c+\epsilon}$ となり，$=$ が得られる． □

(II) $F:M\to\mathbb{R}$ の臨界点全体は f の臨界点全体と一致する．

(II) の証明. $p\notin U$ ならば，$F(p)=f(p)$ だから，p が F の臨界点 $\Leftrightarrow$ p が f の臨界点となる．$p\in U$ のとき，$F=f-\mu(\xi+2\eta)$ より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}&=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\mu'\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi+2\eta)\\ &=\begin{cases}-2x_i(1+\mu') & (1\le i\le r),\\ 2x_i(1-2\mu') & (r+1\le i\le m)\end{cases}\end{aligned}$$

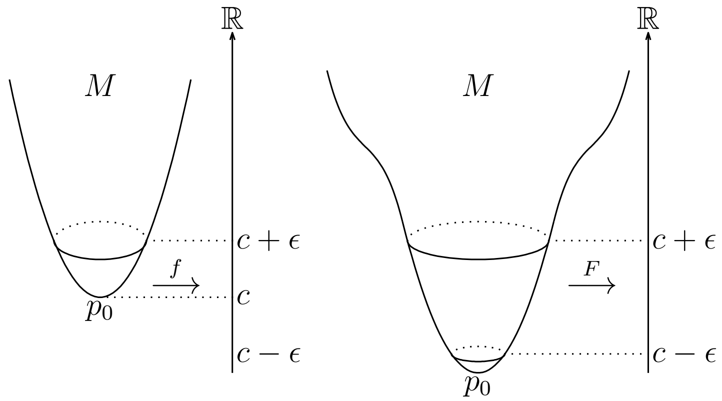
$1+\mu'>0, 1-2\mu'\ge 1>0$ だから，$dF=0\Leftrightarrow p=p_0\Leftrightarrow df=0$. ゆえに主張が得られる． □

(III) $F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$ は $M^{c+\epsilon}$ の変位レトラクトである．

(III) の証明. (I) より $F^{-1}(-\infty,c+\epsilon]=M^{c+\epsilon}$. $F^{-1}[c-\epsilon,c+\epsilon]$ に F の臨界点がないことを言えば，定理 3.26, (3) より主張が得られる．(II) より，$F^{-1}[c-\epsilon,c+\epsilon]$ に f の臨界点がないことを言えばよい．まず，$p_0\notin F^{-1}[c-\epsilon,c+\epsilon]$ をいう．

$$F(p_0)=f(p_0)-\mu(0)=c-\mu(0)<c-\epsilon \qquad (\mu(0)>\epsilon)$$

よって，$p_0 \notin F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$．そこで，$F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon] \subset f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ を言えば証明が完成する．$p \in F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ とすると，$c-\epsilon \leq F(p) \leq f(p)$ より，$c-\epsilon \leq f(p)$．$p \notin U$ または $[p \in U$ かつ $\xi(p)+2\eta(p) \geq 2\epsilon]$ ならば，$f(p) = F(p) \leq c+\epsilon$．$p \in U$ かつ $\xi(p)+2\eta(p) < 2\epsilon$ のとき，(3.27) より，$f(p) < c+\xi$．よって，(III) が示された． □



ここで，

$$
\begin{aligned}
e^r &= \{p \in U \mid \xi(p) < \epsilon, \eta(p) = 0\}, \\
\partial e^r &= \{p \in U \mid \xi(p) = \epsilon, \eta(p) = 0\} (\cong S^{r-1})
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，

$$
\overline{e^r} = \{p \in U \mid \xi(p) \leq \epsilon, \eta(p) = 0\} = E^r \cup \partial e^r
$$

次が成り立つ．

$$
M^{c-\epsilon} \cap \overline{e^r} = \partial e^r, \quad M^{c-\epsilon} \cap e^r = \emptyset, \quad M^{c-\epsilon} \cup \overline{e^r} = M^{c-\epsilon} \cup e^r
$$

実際，

$$
\begin{aligned}
M^{c-\epsilon} \cap \overline{e^r} &= \{p \in U \mid \xi(p) \leq \epsilon, \eta(p) = 0, f(p) = c - \xi(p) \leq c - \epsilon\} \\
&= \{p \in U \mid \xi(p) \leq \epsilon, \xi(p) \geq \epsilon, \eta(p) = 0\} \\
&= \{p \in U \mid \xi(p) = \epsilon, , \eta(p) = 0\} = \partial e^r, \\
M^{c-\epsilon} \cap e^r &= \{p \in U \mid \xi(p) < \epsilon, \eta(p) = 0, f(p) = c - \xi(p) \leq c - \epsilon\} \\
&= \emptyset, \\
M^{c-\epsilon} \cup \overline{e^r} &= M^{c-\epsilon} \cup \partial e^r \cup e^r \qquad (\overline{e^r} = \partial e^r \cup e^r) \\
&= M^{c-\epsilon} \cup e^r \qquad (M^{c-\epsilon} \supset \partial e^r)
\end{aligned}
$$

$M^{c-\epsilon}\cup e^r$ は $M^{c-\epsilon}$ に写像

$$
\begin{aligned}
&\nu_1 : S^{r-1} \to M^{c-\epsilon}; (s_1, \cdots, s_r) \mapsto p \\
&\qquad (x_i(p) = \sqrt{\epsilon} s_1\ (1 \le i \le r), x_j(p) = 0\ (j = r+1, \cdots, n)), \\
&\nu_1(S^{n-1}) = \partial e^r = M^{c-\epsilon} \cap \bar{e^r}
\end{aligned}
$$

により，r 次元胞体 E^r を接着した空間に位相同型である：

$$M^{c-\epsilon} \cup e^r = M^{c-\epsilon} \cup_{\nu_1} E^r \tag{3.28}$$

実際，全射開写像

$$
\begin{aligned}
&\tilde{k} : M^{c-\epsilon} \cup V^r \to M^{c-\epsilon} \cup e^r; \\
&\begin{cases} p \in M^{c-\epsilon} \mapsto p, \\ v \in V^r \mapsto \tilde{k}(v), \begin{cases} x_i(\tilde{k}(v)) = \sqrt{\epsilon} v_i\ (1 \le i \le r), \\ x_j(\tilde{k}(v)) = 0\ (r+1 \le i \le n) \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}
$$

は連続な全単射 $k : M^{c-\epsilon} \cup_{\nu_1} E^r \to M^{c-\epsilon} \cup e^r$ を引き起こす．$M^{c-\epsilon} \cup_{\nu_1} e^r$ は compact，$M^{c-\epsilon} \cup e^r$ は Hausdorff だから，k は位相同型写像である（命題 1.11）．

$$M^{c-\epsilon} \cup e^r \subset F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$$

実際，$F \le f$ より，$M^{c-\epsilon} \subset F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$．$p \in e^r$ とすると，$p \in U, \xi(p) < \epsilon, \eta(p) = 0$．このとき，$F(p) = c - \xi(p) - \mu(\xi(p))$．$\tilde{F}(t) = c - t - \mu(t)$ とおくと，$F(p) = \tilde{F}(\xi(p))$．$\tilde{F}'(t) = -(1 + \mu'(t)) < 0$ より，$\tilde{F}$ は単調減少である．よって，

$$F(p) = c - \xi(p) - \mu(\xi(p)) \le \tilde{F}(0) = \tilde{F}(\xi(p_0)) = F(p_0) = c - \mu(0) < c - \epsilon$$

となり，$p \in F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$．
(IV) $M^{c-\epsilon} \cup e^r$ は $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ の変位レトラクトである．

(IV) の証明．$M^{c-\epsilon} \cup e^r$ の変位レトラクション

$$r : F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \times I \to F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$$

を構成する．まず，U を次のように分割する：

$$\begin{aligned}
U &= \{p \in U \mid \xi(p) \geq \eta(p) + \epsilon\} \cup \{p \in U \mid \xi(p) \leq \eta(p) + \epsilon\} \\
&= \{p \in U \mid \xi(p) \geq \eta(p) + \epsilon\} \cup \{p \in U \mid \epsilon \leq \xi(p) \leq \eta(p) + \epsilon\} \\
&\quad\ \cup \{p \in U \mid \epsilon \geq \xi(p), \xi(p) \leq \eta(p) + \epsilon\} \\
&= \{\xi(p) \geq \eta(p) + \epsilon\} \cup \{\epsilon \leq \xi(p) \leq \eta(p) + \epsilon\} \cup \{\xi(p) \leq \epsilon\}
\end{aligned}$$

そこで，

$$\begin{aligned}
&U_1 = \{p \in U \mid \xi(p) \leq \epsilon\}, \quad U_2 = \{p \in U \mid \epsilon \leq \xi(p) \leq \eta(p) + \epsilon\}, \\
&U_3 = \{p \in U \mid \eta(p) + \epsilon \leq \xi(p)\} = M^{c-\epsilon} \cap U
\end{aligned}$$

とおくと，U_i は U の閉集合で，$U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$．$U_i \cap U_j$ は

$$\begin{aligned}
U_1 \cap U_2 &= \{p \in U \mid \epsilon = \xi(p)\}, \\
U_2 \cap U_3 &= \{p \in U \mid \epsilon \leq \xi(p) = \eta(p) + \epsilon\} = \{p \in U \mid \xi(p) = \eta(p) + \epsilon\}, \\
U_1 \cap U_3 &= \{p \in U \mid \eta(p) + \epsilon \leq \xi(p) \leq \epsilon\} = \{p \in U \mid \eta(p) = 0, \xi(p) = \epsilon\} \\
&= U_1 \cap U_2 \cap U_3
\end{aligned}$$

$p \in U_3$ に対し，$F(p) = c - \xi(p) + \eta(p) \leq c - \epsilon$ より，$U_3 \subset M^{c-\epsilon} \subset F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$．

[変位レトラクトの構成]

まず，$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ を

$$\begin{aligned}
F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] &= (F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] - U) \cup (F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \cap U) \\
&= (M^{c-\epsilon} - U) \cup (F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \cap U)
\end{aligned}$$

と分解する．

(0) U の外 $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] - U \subset M^{c-\epsilon}$ では $r(p,t) = p$ と定める (定めざるを得ない)．

(1) $U_3 \subset M^{c-\epsilon}$ を踏まえて，連続写像 $r : U_3 \times I \to F^{-1}(\infty, c-\epsilon]$ を $r(p,t) = p$ と定める (定めざるを得ない)．

(2) 連続写像 $r : U_1 \cap F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \times I \to U$ を

$$x_i(r(p,t)) = \begin{cases} x_i(p) & (1 \leq i \leq r), \\ (1-t)x_i(p) & (r+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

と定めると，$r(p,0)=p$．まず，

$$r(U_1\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]\times I)\subset F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$$

となることが次の不等式から従う：

$$\begin{aligned}F(r(p,t))&=c-\xi(p)+(1-t)^2\eta(p)-\mu(\xi(p)+2(1-t)^2\eta(p))\\&\le c-\xi(p)+\eta(p)-\mu(\xi(p)+2\eta(p))=F(p)\le c-\epsilon\end{aligned}$$

以下，r を $r:U_1\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]\times I\to F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$ とみなす．

$$r(p,1)\in\{p\in U\mid\eta(p)=0,\xi(p)\le\epsilon\}=\bar{e_r}=\partial e_r\cup e_r\subset M^{c-\epsilon}\cup e_r$$

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}&M^{c-\epsilon}\cap U_1\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]\\&=\{p\in U\mid\xi(p)\le\epsilon,f(p)=c-\xi(p)+\eta(p)\le c-\epsilon\}\\&=\{p\in U\mid\xi(p)=\epsilon,\eta(p)=0\}\end{aligned}$$

より，$p\in(M^{c-\epsilon}\cup e^r)\cap U_1\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$ に対し，$\eta(p)=0$ となるので，$r(p,t)=p$．

(3) $r:U_2\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]\times I\to M$ を

$$x_i(r(p,t))=\begin{cases}x_i(p)&(1\le i\le r),\\s(t)x_i(p)&(r+1\le i\le n)\end{cases}$$

ただし，

$$s(t)=\begin{cases}(1-t)+t\sqrt{\frac{\xi(p)-\epsilon}{\eta(p)}}&(\eta(p)\neq0),\\0&(\eta(p)=0)\end{cases}$$

と定める．$s(0)=0$ より，$r(p,0)=p$．$0\le\xi(p)-\epsilon\le\eta(p)$ より，$\eta(p)\neq0$ のとき，

$$0\le\sqrt{\frac{\xi(p)-\epsilon}{\eta(p)}}\le1$$

これを用いて，(1) と同様の計算をすることにより，$r(U_2\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]\times I)\subset F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$ が得られる．以下，r を

$$r:U_2\cap F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]\times I\to F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$$

と見なす．r は連続である．実際，$\epsilon \leq \xi(p) \leq \eta(p)+\epsilon$ より，$\eta(p) \to 0$ のとき，$\xi(p) \to \epsilon$ だから，$r+1 \leq i \leq n$ に対し，

$$(0 \leq) \left| \sqrt{\frac{\xi(p)-\epsilon}{\eta(p)}} x_i(p) \right| = \sqrt{\xi(p)-\epsilon} \sqrt{\frac{x_i(p)^2}{\eta(p)}} \leq \sqrt{\xi(p)-\epsilon} \to 0$$

これより，r の連続性が従う．$r+1 \leq i \leq n$ のとき，$\eta(p) \neq 0$ ならば，

$$x_i(r(p,1)) = \sqrt{\frac{\xi(p)-\epsilon}{\eta(p)}} x_i(p)$$

より，$\eta(r(p,1)) = \xi(p)-\epsilon$．これを用いて，

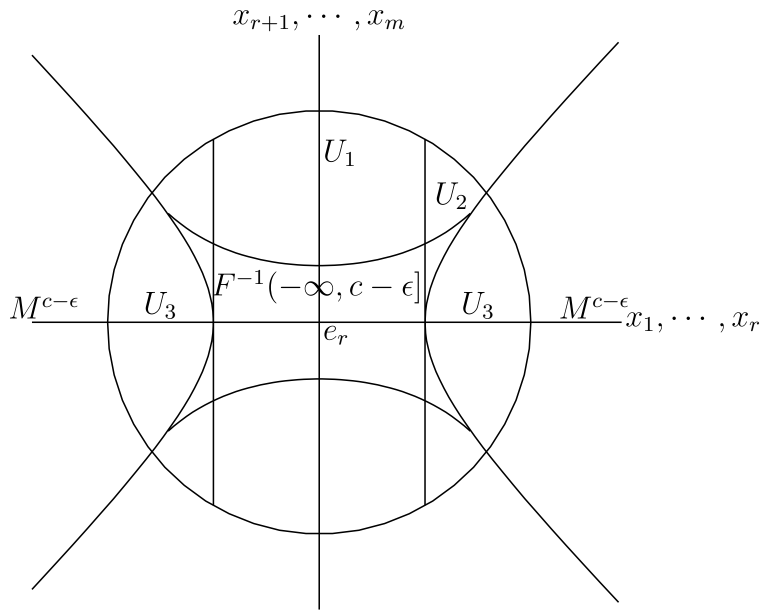
$$f(r(p,1)) = c-\xi(p)+\eta(p) = c-\xi(p)+\xi(p)-\epsilon = c-\epsilon$$

$\eta(p)=0$ ならば，$f(r(p,1)) = c-\xi(p) \leq c-\epsilon$．いずれの場合も $r(p,1) \in M^{c-\epsilon}$．

$$\begin{aligned}
&U_2 \cap F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \cap M^{c-\epsilon} \\
&= \{p \in U \mid \epsilon \leq \xi(p) \leq \eta(p)+\epsilon, -\xi(p)+\eta(p) \leq c-\epsilon\} \\
&= \{p \in U \mid \xi(p) = \eta(p)+\epsilon\}
\end{aligned}$$

だから，$p \in U_2 \cap F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \cap M^{c-\epsilon}$ に対し，$r(p,t) = p$．$p \in U_2 \cap F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \cap e^r$ に対し，$\eta(p)=0$ だから，$r(p,t)=p$．よって，$p \in U_2 \cap F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] \cap (M^{c-\epsilon} \cup e^r)$ に対し，$r(p,t)=p$．

このように定義された r がレトラクションになることを示す．まず，r の連続性を示す．$U_1 \cap U_3$ 上で $\eta(p)=0$ だから，(1) の r と (2) の r は連続的につながる．$U_2 \cap U_3$ 上で $\xi(p)=\eta(p)+\epsilon$ だから，(1) の r と (3) の r は連続的につながる．$U_1 \cap U_2$ 上で $\xi(p)=\epsilon$ だから，(2) の r と (3) の r は連続的につながる．r の定義から明らかに (0) の r と (1) の r は連続的につながる．



□

(I)∼(IV) を用いて主張を示す．(III), (IV) と補題 1.36 より，$M^{c-\epsilon}\cup e^r$ は $M^{c+\epsilon}$ の変位レトラクトである．$f^{-1}[c+\epsilon,b]$ に f の臨界点はないから，$M^{c+\epsilon}$ は M^b の変位レトラクトである（定理 3.26, (3)）．よって，$M^{c-\epsilon}\cup e^r$ は M^b の変位レトラクトである (補題 1.36)．命題 1.37 より，$M^{c-\epsilon}\cup e^r$ と M^b はホモトピー同値である．(3.28) より $M^{c-\epsilon}\cup e^r = M^{c-\epsilon}\cup_{\nu_1} E^r$(位相同型) だから，$M^{c-\epsilon}\cup_{\nu_1} E^r$ と M^b はホモトピー同値である．$f^{-1}[a,c-\epsilon]$ に f の臨界点はないので，M^a は $M^{c-\epsilon}$ の変位レトラクトである（定理 3.26, (3)）．特に，M^a と $M^{c-\epsilon}$ はホモトピー同値である (命題 1.37)．命題 3.31 より，$M^{c-\epsilon}\cup_{\nu_1} E^r$ は，M^a に E^r をある連続写像により接着した空間 $M^a\cup_\nu E^r$ にホモトピー同値である．

$$M^b \xrightarrow[\text{定理 }3.26,(3)]{\text{変位レトラクト}} M^{c+\epsilon} \xrightarrow[\text{(III)}]{\text{変位レトラクト}} F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$$
$$\xrightarrow[\text{(IV)}]{\text{変位レトラクト}} M^{c-\epsilon}\cup e^r \underset{(3.28)}{=} M^{c-\epsilon}\cup_{\nu_1} E^r \underset{\text{命題 }3.31}{\simeq} M^a\cup_\nu E^r$$

命題 1.37 と補題 1.25 から，M^b と $M^a\cup_\nu E^r$ はホモトピー同値である． □

次の定理がこの節の主結果である．

定理 3.33. [**Morse 理論の基本定理**] M を m 次元 compact C^∞ 級多様体，$f: M\to\mathbb{R}$ を Morse 関数とする．f の臨界点全部を $p_1,\cdots,p_n$ とし (定理 3.5)，各点における指数を $r_1,\cdots,r_n$ とする．このとき，M は $r_1,\cdots,r_n$ 次元胞体 $e^{r_1},\cdots,e^{r_n}$ をもつ有限 CW 複体にホモトピー同値である：

$M \simeq e^{r_1} \cup \cdots \cup e^{r_n}$

証明．必要があれば，番号を付け替えて $f(p_1) < \cdots < f(p_n)$ としてよい．このとき，$r_1 = 0, r_n = m$ (問題 3.4)．実数 $a_1, \cdots, a_{n+1}$ を

$$a = a_1 < f(p_1) < a_2 < f(p_2) < a_3 < \cdots < f(p_n) < a_{n+1} = b$$

ととる．このとき，

$$\emptyset = M^{a_1} \subset M^{a_2} \subset \cdots \subset M^{a_{n+1}} = M$$

各 i についてホモトピー同値写像

$$h_i : M^{a_i} \to K_i = e^{r_1} \cup \cdots \cup e^{r_{i-1}} \tag{3.29}$$

が存在することを示せば，$i = k+1$ とおき主張が得られる．i に関する数学的帰納法で主張を示す．

$i = 1$ のときは，$M^{a_1} = \emptyset$ だから $K_1 = \emptyset$ として主張が成り立つ．

$i = 2$ のときは，命題 3.27 から主張が成り立つ．

i のとき主張が成り立つと仮定すると，ホモトピー同値写像 (3.29) が存在する．定理 3.32 より，$M^{a_{i+1}}$ は M^{a_i} に r_i 次元胞体 e^{r_i} をある連続写像 $\nu_i : S^{r_i - 1} \to M^{a_i}$ により接着した空間 $M^{a_i} \cup_{\nu_i} e^{r_i}$ にホモトピー同値である：

$$M^{a_i+1} \simeq M^{a_i} \cup_{\nu_i} e^{r_i}$$

胞体近似定理により，$h_i \nu_i : S^{r_i - 1} \to K_i$ はある連続写像 $\nu_i' : S^{r_i-1} \to K = K_i, \nu_i'(S^{r_i-1}) \subset K^{r_i-1}$ にホモトープである．命題 3.30 により，$K \cup_{h_i \nu_i} e^{r_i}$ と $K \cup_{\nu_i'} e^{r_i}$ はホモトピー同値である：

$$K \cup_{h_i \nu_i} e^{r_i} \simeq K \cup_{\nu_i'} e^{r_i}$$

K は有限 CW 複体だから，命題 1.65 により，$K \cup_{\nu_i'} e^{r_i}$ も有限 CW 複体である．命題 3.31 より，$M^{a_i} \cup_{\nu_i} e^{r_i}$ と $K \cup_{h_i \nu_i} e^{r_i}$ はホモトピー同値である：

$$M^{a_i} \cup_{\nu_i} e^{r_i} \simeq K \cup_{h_i \nu_i} e^{r_i}$$

以上より，

$$\begin{aligned} M^{a_{i+1}} &\overset{\text{定理 3.32}}{\simeq} M^{a_i} \cup_{\nu_i} e^{r_i} \overset{\text{命題 3.31}}{\simeq} K \cup_{h_i \nu_i} e^{r_i} \\ &\overset{\text{命題 3.30}}{\simeq} K \cup_{\nu_i'} e^{r_i} \overset{\text{問題 1.27}}{=} e^{r_1} \cup \cdots \cup e^{r_{i-1}} \cup e^{r_i} \end{aligned}$$

よって主張が示された． □

例 3.34. 問題 3.3 の結果から 2 次元トーラス T^2 は 4 つの胞体 e^0, e^1, e^1, e^2 をもつ有限 CW 複体にホモトピー同値である：$T^2 \simeq e^0 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^2$.

[参考] Morse 理論の基本定理の仮定の下で，M の Euler 数 $\chi(M)$ は

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r_i} \tag{3.30}$$

で与えられることが知られている．このことは，Morse 理論の基本定理，Euler 数のホモトピー不変性，Euler-Poincarè の公式から従う．

問題 3.7. (3.30) を用いて次を示せ．

$$\chi(S^m) = 1 - (-1)^{m+1} = \begin{cases} 2 & (m : \text{偶数}) \\ 0 & (m : \text{奇数}) \end{cases} \quad , \quad \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

[参考]　S^2 を三角形分割すると，四面体が得られる．これを用いて，$\chi(S^2)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= \chi(\text{四面体}) = (\text{四面体の})\ \text{頂点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数} \\ &= 4 - 6 + 4 = 2 \end{aligned}$$

一般に S^m を三角形分割は，$m+1$ 単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_{m+1}|$ の境界 $\partial\sigma$ で与えられる．これより，

$$\begin{aligned} &\partial\sigma \text{の頂点の数} = {}_{m+2}C_1 = m+2, \\ &\partial\sigma \text{の辺の数} = {}_{m+2}C_2, \\ &\partial\sigma \text{の面の数} = {}_{m+2}C_3, \\ &\qquad \vdots \\ &\partial\sigma \text{の}\ m\ \text{次元の面の数} = {}_{m+2}C_{m+1} = m+2 \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} \chi(S^m) &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} {}_{m+2}C_k = \sum_{k=0}^{m+2} (-1)^{k+1} {}_{m+2}C_k + 1 - (-1)^{m+3} \\ &= -(1-1)^{m+2} + 1 - (-1)^{m+1} = 1 - (-1)^{m+1} \end{aligned}$$

問題 3.8. (3.30) を用いて $\chi(\mathbb{R}P^m), \chi(\mathbb{C}P^m)$ の値をそれぞれ求めよ．

問題 3.9. M, N を compact 多様体とする．
　このとき，(3.30) を用いて $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$ を示せ．

問題 3.10. m 次元トーラス T^m の Euler 数 $\chi(T^m)$ を求めよ．

　[参考] (例 3.5 の直後の [参考] の続き) 境界のない compact 2 次元連結多様体は Σ_g または，P^2 の k 個の連結和 $P^2\#\cdots\#P^2$ に微分同型であることが知られている ([6])．これらの曲面の向き付け可能性と Euler 数は次の表で与えられる：

曲面 S	向き付け	Euler 数 $\chi(S)$
Σ_g	可能	$2(1-g)$
$P^2\#\cdots\#P^2$ (k 個)	不可能	$2-k$

3.3 Reeb の球面定理

　問題 3.1 では，m 次元球面 S^m 上に臨界点が 2 つのみの Morse 関数があることを確かめた．Reeb の球面定理 (定理 3.35) は，ある意味ではこの逆を主張している．

定理 3.35. [**Reeb の球面定理**] compact m 次元 C^∞ 級多様体 M 上に臨界点が 2 つのみの Morse 関数 f が存在したとする．このとき，M は m 次元球面 S^m と位相同型である．さらに，$m \leq 6$ ならば，M は S^m と微分同型である．

証明の準備． f は compact 位相空間上の連続関数だから最小値 $m_1 = f(p)$ と最大値 $m_2 = f(q)$ をもつ ($m_1 \leq m_2$)．このとき，p, q は f の臨界点になる．f は Morse 関数だから，$f(p) \neq f(q)$．よって，$m_1 < m_2$．f は Morse 関数だから，p, q において f は非退化で，指数はそれぞれ $0, m$ になる．仮定より f の臨界点は上の p, q のみである．□

　主張を示すために，次の補題をまず示す．

補題 3.36. 定理 3.35 の仮定の下で次の条件を満たす Morse 関数 $F : M \to \mathbb{R}$ と $\epsilon > 0$ と p, q それぞれの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ と $(V; y_1, \cdots, y_m)$ が存在する：

(1) F の臨界点は p, q のみで F は p, q でそれぞれ最小値と最大値をとる．

(2) $U\cap V=\emptyset$であり，$c_1=F(p), c_2=F(q)$とおくとき，$c_1+\epsilon<c_2-\epsilon$ かつ $F^{-1}(-\infty, c_1+\epsilon]\subset U, F^{-1}[c_2-\epsilon,\infty)\subset V$

補題 *3.36* の証明. M は Hausdorff で，$p\neq q$ だから，Morse の補題より，p,q のそれぞれの座標近傍 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m), (V,\psi;y_1,\cdots,y_m)$ を $U\cap V=\emptyset$, $x_i(p)=0$, $y_j(q)=0$ かつ

$$f(x)=m_1+\|x\|^2 \quad (x\in U), \quad f(y)=m_2-\|y\|^2 \quad (y\in V)$$

ととれる．$m_1<m_2$ で f は連続だから，$\epsilon>0$ が存在して，$m_1+\epsilon<m_2-\epsilon$ かつ

$$B(U):=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|^2\leq 2\epsilon\}\subset\varphi(U),$$
$$B(V):=\{y\in\mathbb{R}^m \mid \|y\|^2\leq 2\epsilon\}\subset\psi(V)$$

とできる．補題 3.25 の条件を満たす C^∞ 級関数 $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をとり，C^∞ 級関数 $F:M\to\mathbb{R}$ を

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in M-U\cup V), \\ f(x)-\mu(2\|x\|^2) & (x\in U), \\ f(x)+\mu(\|x\|^2) & (x\in V) \end{cases}$$

と定める．まず，F の臨界点を求める．$M-U\cup V$ 上で $F=f$ だから，$M-U\cup V$ 上に F の臨界点はない．U 上で

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i(1-2\mu'(2\|x\|^2))$$

$\mu'\leq 0$ より，$1-2\mu'(2\|x\|^2)\geq 1$．よって，$(dF)_z=0\Leftrightarrow(df)_z=0\Leftrightarrow z=p$．
V 上で

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}=-2y_i(1+\mu'(\|y\|^2))$$

$\mu'+1>0$ だから，$(dF)_z=0\Leftrightarrow(df)_z=0\Leftrightarrow z=q$．以上より，$M$ 上で F の臨界点は p,q のみである．

$$F(p)=m_1-\mu(0)<m_1<m_2<m_2+\mu(0)=F(q)$$

M は compact で F は連続なので，F は最小値，最大値をもつ．よって，F は p で最小値 $c_1:=m_1-\mu(0)$，q で最大値 $c_2:=m_2+\mu(0)$ をとる．このとき，

$$c_1+\epsilon=m_1+\epsilon-\mu(0)<m_2-\epsilon-\mu(0)<c_2-\epsilon$$

さらに，$c_1+\epsilon=m_1+\epsilon-\mu(0)<m_2-\epsilon-\mu(0)<c_2-\epsilon$だから，

$$
\begin{aligned}
F^{-1}(-\infty,c_1+\epsilon] &= \{x\in M \mid F(x)\le c_1+\epsilon\}\\
&= \{x\in U \mid F(x)\le c_1+\epsilon\}\cup\{x\in V \mid F(x)\le c_1+\epsilon\}\\
&= \{x\in U \mid F(x)\le c_1+\epsilon\}\subset U,\\
F^{-1}[c_2-\epsilon,\infty) &= \{x\in M \mid F(x)\ge c_2-\epsilon\}\\
&= \{x\in V \mid F(x)\ge c_2-\epsilon\}\cup\{x\in U \mid F(x)\ge c_2-\epsilon\}\\
&= \{x\in V \mid F(x)\ge c_2-\epsilon\}
\end{aligned}
$$

以上で主張が示された． □

定理 *3.35* の証明の続き．補題 3.36 の条件を満たす Morse 関数 $F:M\to\mathbb{R}$ をとる．このとき，

$$
\begin{aligned}
&F^{-1}[c_1,c_1+\epsilon]=\{x\in U \mid F(x)\le c_1+\epsilon\},\\
&F^{-1}[c_2-\epsilon,c_2]=\{x\in V \mid c_2-\epsilon\le F(x)\},\\
&F^{-1}[c_1,c_1+\epsilon]\cap F^{-1}[c_2-\epsilon,c_2]\subset U\cap V=\emptyset
\end{aligned}
$$

Morse の補題を F,U,V に適用すると，$F^{-1}[c_1,c_1+\epsilon]$ と $F^{-1}[c_2-\epsilon,c_2]$ はそれぞれ単位閉円板 D^m と微分同型になることがわかる． □

命題 3.37. $D^2=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|\le 1\}, S^1=\partial D^2=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|=1\}=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid\theta\in\mathbb{R}\}$ と定める．任意の微分同型写像 $h:S^1\to S^1$ は微分同型写像 $H:D^2\to D^2$ に拡張できる．

証明. h を，S^1 のパラメーター θ を用いて，$h=h(\theta)$ と表示する．h は微分同型写像だから，$h'(\theta)\neq 0$．$h'(\theta)$ は連続だから，中間値の定理により，常に $h'(\theta)>0$ または常に $h'(\theta)<0$. 必要があれば D^2 を裏返す微分同型写像を合成することにより，常に $h'(\theta)>0$ と仮定して一般性を失わない．このとき，$h(\theta+2\pi)=h(\theta)+2\pi$．まず，$h:S^1\to S^1$ を微分同型写像 $\tilde{H}:S^1\times[0,1]\to S^1\times[0,1]$ に拡張する．そのために，C^∞ 級写像 $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$
\begin{cases}
b(t)=0 & (t\le 0),\\
0<b(t)<1 & (0<t<1),\\
b(t)=1 & (t\ge 1)
\end{cases}
$$

ととり，

$$
\tilde{H}(\theta,t)=(b(t)h(\theta)+(1-b(t))\theta,t)\qquad((\theta,t)\in S^1\times[0,1])\tag{3.31}
$$

$\tilde{H}(\theta+2\pi,t)=\tilde{H}(\theta,t)$ だから，$\tilde{H}$ は $S^1\times[0,1]$ から $S^1\times[0,1]$ への写像を定める．$\tilde{H}$ が微分同型写像になることを示す．単射性：

$$\begin{aligned}&\tilde{H}(\theta_1,t_1)=\tilde{H}(\theta_2,t_2)\\&\Leftrightarrow t_1=t_2, b(t_1)(h(\theta_1)-h(\theta_2))+(1-b(t_1))(\theta_1-\theta_2)=0\\&\Leftrightarrow t_1=t_2, h(\theta_1)=h(\theta_2)\Leftrightarrow t_1=t_2,\theta_1=\theta_2\quad(h:\text{単射})\end{aligned}$$

ゆえに，$\tilde{H}$ は単射である．

全射性：任意の $(\varphi,t)\in[0,2\pi]\times[0,1]$ に対し，$b(t)h(\theta)+(1-b(t))\theta=\varphi$ となる $0\le\theta\le2\pi$ となる $0\le\theta\le2\pi$ が存在することを言えばよい．$\theta=0,2\pi$ を代入すると，

$$b(t)h(0)+(1-b(t))0=b(t)h(0),\quad b(t)h(2\pi)+(1-b(t))2\pi=b(t)h(0)+2\pi$$

中間値の定理により，$0\le\theta\le2\pi$ が存在して，$b(t)h(\theta)+(1-b(t))\theta=\varphi$．$\tilde{H}$ の Jacobi の関数行列式は

$$J\tilde{H}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta}(b(t)h(\theta)+(1-b(t))\theta) & *\\ 0 & 1\end{vmatrix}=b(t)h'(\theta)+1-b(t)>0$$

以上により，$\tilde{H}$ は微分同型写像である．$S^1\times\{0\}=\partial D^2$ に D^2 を貼り付けると $\tilde{H}$ は $D^2=D^2\cup(S^1\times[0,1])$ 上の微分同型写像に拡張できる． □

[参考 1] Reeb の定理の f に関する仮定は，(退化してもよい) 臨界点が二つのみの C^∞ 級関数に弱めることができる．

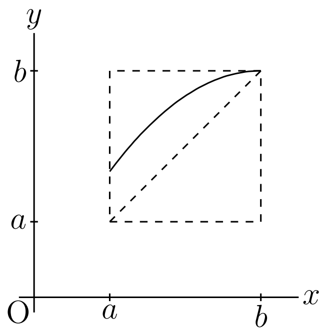
[参考 2] $m\ge7$ のとき，Reeb の球面定理における「位相同型」を「微分同型」に置き換えた主張は成り立たない．Milnor は，S^7 と位相同型であるが微分同型ではない多様体の例を与えた (1956 年)．このような例は異種球面 (exotic sphere) と呼ばれている．

[参考 3] $\mathbb{R}^4$ には標準的ではない多様体構造が存在する．すなわち，$\mathbb{R}^4$ と位相同型であるが微分同型ではない多様体が存在する (ドナルドソン, 1982 年．松本 [7, 付録 2] を参照)．$m\ne4$ のとき，$\mathbb{R}^m$ の多様体構造は標準的なものに限られる．

4 演習問題

本文中の問題は，本文の理解を助けるためのものである．この節での問題は，ややマニアックなものや発展的なものを集めた．

問題 4.1. $a < b$ とする．連続写像 $f : [a, b] \to [a, b]$ は不動点 ($f(c) = c$ となる点) をもつことを示せ．



問題 4.2. Hausdorff 空間 X に位相群 G が左から連続に作用しているとする．$x_0 \in X$ における G のイソトロピー部分群 $G_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ は G の閉部分群であることを示せ．

問題 4.3. X を無限集合とする．$O \subset X$ が開集合であると言うことを，$X - O$ が有限集合であるかまたは $O = \emptyset$ であることと定義する．

(1) 開集合の全体は開集合系の公理を満たすことを示せ．

(2) 空でない二つの開集合の交わりは，空でない開集合になることを示せ．

(3) X は Hausdorff 空間か?

問題 4.4. $\mathbb{R}$ に次で同値関係 $\sim$ を入れる：$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$．$x$ の同値類を $[x]$ と表す．$\mathbb{R}/\sim$ に商位相を入れる．$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ で自然な射影を表す．

(1) 一点集合 $\{[0]\}$ は閉集合か?

(2) $\mathbb{R}/\sim$ は Hausdorff 空間か?

問題 4.5. B, F を Hausdorff 位相空間，E を位相空間とする．連続写像 $\pi : E \to B$ は次を満たすとする：任意の $b \in B$ に対し，b の B における開近傍 U_b と位相同型写像 $h = (p_1, p_2) : \pi^{-1}(U_b) \to U_b \times F$ が存在して，$p_1(z) = \pi(z)$．このとき，E は Hausdorff 空間であることを示せ．

問題 4.6. 写像

$$
\begin{aligned}
f :& \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2; \\
& z \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{\|z\|^2+1}\mathrm{Re}(z) \\ \frac{2}{\|z\|^2+1}\mathrm{Im}(z) \\ \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \end{pmatrix}, \infty \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

について，次の問に答えよ．

(1) $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \neq 1$ を示せ．

(2) f は全単射になることを示せ．

(3) f が位相同型写像になるように，$\mathbb{C}$ に位相を入れると，∞ の近傍はどのようになるか？

問題 4.7. G を (Hausdorff 空間とは仮定しない) 位相群，H を G の部分群とする．G/H が Hausdorff 空間となるための必要十分条件は H が G の閉部分群となることである．これを示せ．

問題 4.8. M を m 次元 C^∞ 級多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数，$(U; x_1, \cdots, x_m)$ を M の座標近傍とする．U 上に f の退化した臨界点が存在しないための必要十分条件は，U 上で

$$
\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| > 0
$$

が成り立つことである．これを示せ．

問題 4.9. compact 多様体 M に対し座標近傍からなる有限開被覆 $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ と U_i の compact 集合 K_i で，$M = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ となるものが存在することを示せ．

問題 4.10. 二つの文字 x_1, x_2 で生成される自由群に関係式 $x_1^2 x_2^2 = 1, x_1 x_2 = x_2 x_1$ を入れたものは加法群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ に同型であることを示せ．

$$
\langle x_1, x_2 \mid x_1^2 x_2^2 = 1, x_1 x_2 = x_2 x_1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2
$$

問題 4.11. M を C^∞ 級多様体とし，$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ とおく．$\pi : T(M) \to M$ で自然な射影を表す．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を M の局所座標系による開被覆とする．全単射 h_α を

$$h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m; \sum y_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto (p, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha)$$

と定める．このとき，次を示せ．

(1) $U \subset T(M)$ が開集合であることを任意の $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対し，$h_\alpha(U \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ が $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ の開集合であることと定義すると，$T(M)$ の開集合全体は開集合系の公理を満たす．$\pi^{-1}(U_\alpha)$ は $T(M)$ の開集合である．

(2) h_α は位相同型写像である．

(3) π は連続開写像である．特に，$T(M)$ は Hausdorff 位相空間になる．

(4) $T(M)$ は $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), h_\alpha, (x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha)\}$ を局所座標系とする $2m$ 次元 C^∞ 級多様体になる．

(5) π は C^∞ 級写像である．

$T(M)$ を M の**接束**という．

問題 4.12. B, M を C^∞ 級多様体とする．$\pi : B \to M$ を全射 C^∞ 級写像とする．V を有限次元実ベクトル空間とする．各 $x \in M$ に対し $\pi^{-1}(x) (\subset B)$ は V と同型なベクトル空間とする．$\varphi_x : \pi^{-1}(x) \to V$ で線形同型写像を表す．M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と微分同型写像

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$$

が存在して，$\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}(u) = (\pi(u), \varphi_x(u))$ が成り立つとする．このとき，B を M 上の**ベクトル束**という．次を示せ．

(1) $\pi : M \times V \to M; (x, v) \to x$ と定めると，$M \times V$ は M 上のベクトル束になることを示せ．

(2) 接束 $T(M)$ は M 上のベクトル束となることを示せ．

問題 4.13. $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{2n^2}$ の n^2-1 次元と $2n^2-2$ 次元の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

参考文献

[1] 杉浦光夫著，リー群論，共立出版

[2] 田崎博之著，数学類　微分幾何学　Morse 理論 (配布資料) 2014 年度

[3] 坪井俊著，幾何学 II ホモロジー入門，東京大学出版会

[4] 畠山洋二，多様体入門，数学ライブラリー 41, 森北出版，1975

[5] 松本幸夫，多様体の基礎，東京大学出版会

[6] 松本幸夫，モース理論の基礎，岩波書店

[7] 松本幸夫，トポロジーへの誘い，日本評論社

[8] 横田一郎，多様体とモース理論，現代数学社

[9] 横田一郎，群と位相，現代数学社

[10] 和久井道久著，代数トポロジーの基礎，近代科学社

索 引

問題解答

問題 1.1. Hausdorff 位相空間 X の一点部分集合 $\{x\}$ は閉集合であることを示せ．

証明. x を固定する．$y \in X, y \neq x$ に対し，x, y それぞれの開近傍 U_y, V_y で $U_y \cap V_y = \emptyset$ となるものが存在する．開集合 V_y の和集合 $V = \bigcup_y V_y$ は X の開集合で，$V = X - \{x\}$．よって，$\{x\} = X - V$ は閉集合である． □

問題 1.2. X, Y を位相空間，$X \cap Y = \emptyset$ とする．次を示せ．

(1) $X \cup Y$ に位相が次で定まる：$X \cup Y$ の部分集合 O が開集合であるとは，X の開集合 U と Y の開集合 V が存在して，$O = U \cup V$ と表されるときをいう．このようにして，$X \cup Y$ に位相が定まることを確かめよ．

(2) X の開集合 U は位相和 $X \cup Y$ の開集合でもある．Y の開集合 V は位相和 $X \cup Y$ の開集合でもある．

(3) X と Y はそれぞれ $X \cup Y$ の開かつ閉集合である．

(4) X, Y が Hausdorff 位相空間ならば，位相和 $X \cup Y$ も Hausdorff 位相空間である．

証明. (1) $\emptyset$ は X, Y の開集合だから，$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ は $X \cup Y$ の開集合である．X, Y はそれぞれ X, Y の開集合だから，$X \cup Y$ は $X \cup Y$ の開集合である．O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を $X \cup Y$ の開集合とすると，$, Y$ のそれぞれの開集合 U_λ, V_λ が存在して，$O_\lambda = U_\lambda \cup V_\lambda$．このとき，

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda)$$

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ はそれぞれ X, Y の開集合だから，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は $X \cup Y$ の開集合である．

さらに，Λ が有限集合のとき，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ はそれぞれ X, Y の開集合だから，

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \cup (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda)$$

は $X \cup Y$ の開集合である．

以上より，$X \cup Y$ は位相空間になる．

(2) $U = U \cup \emptyset, V = \emptyset \cup V$ だから，U, V はそれぞれ $X \cup Y$ の開集合である．

(3) (2) より X, Y はそれぞれ $X \cup Y$ の開集合である．$X = X \cup Y - Y, Y = X \cup Y - X$ だから，X, Y はそれぞれ $X \cup Y$ の閉集合でもある．

(4) 省略. □

問題 1.3. X を位相空間，$A \subset X$ とする．次を示せ．

(1) $x \in X$ に対し，$x \in \bar{A}$ となるための必要十分条件は，x の任意の近傍 U に対し，$U \cap A \neq \emptyset$.

(2) A が稠密になるための必要十分条件は，任意の開集合 U に対し，$U \cap A \neq \emptyset$ となることである．

証明. (1) $U = X - B, B = X - U$ と対応させることにより，

A を含むある閉集合 B に対し，$x \notin B \Leftrightarrow x$ のある開近傍 U に対し，$U \cap A = \emptyset$

となることが言える．対偶をとると主張が得られる．

(2) は (1) から直ちに従う． □

問題 1.4. $X = \mathbb{R}^n$ とする．$r > 0$ に対し，$U_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \epsilon\}$ とおくと，$\overline{U_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$ となることを示せ．

証明. $\{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$ は $U_r(x)$ を含む閉集合だから，

$$U_r(x) \subset \overline{U_r(x)} \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

$y \in \mathbb{R}^n$ が $d(x, y) = r$ を満たすとする．$0 < t < 1$ に対し，$z = y + t(x - y)$ とおく．このとき，

$$d(x, z) = |y - x + t(x - y)| = |(t - 1)(x - y)| = (1 - t)r < r$$

となるから，$z \in U_r(x)$. $\epsilon > 0$ を任意とする．$0 < t < \epsilon/r$ のとき，$d(yz) = rt < \epsilon$ となり，$z \in U_\epsilon(y)$. 以上より，$U_\epsilon(y) \cap U_r(x) \neq \emptyset$. 問題 1.3 の結果より，$y \in \overline{U_r(x)}$. ゆえに，主張が従う． □

問題 1.5. 次を示せ．$f : X \to Y$ を位相空間 X, Y の間の写像とする．このとき，f が連続になるための条件は，Y の任意の閉集合 A に対し，$f^{-1}(A)$ が X の閉集合になることである．

証明. 一般に部分集合 $B \subset Y$ に対し,

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(Y-B) &= \{x \in X \mid f(x) \in Y-B\} = \{x \in X \mid f(x) \notin B\} \\
&= \{x \in X \mid x \notin f^{-1}(B)\} = X - f^{-1}(B)
\end{aligned}
$$

これより直ちに主張が従う. □

問題 1.6. 次を示せ. $f : X \to Y$ を位相空間 X, Y の間の連続写像とする. このとき, 任意の $x \in X$ と $f(x)$ の任意の近傍 V に対し, x の近傍 U が存在して, $f(U) \subset V$ となる.

証明. f は連続だから, $U := f^{-1}(V)$ は X の開集合である. $f(x) \in V$ より, $x \in f^{-1}(V) = U$ となり, U は x の近傍である. このとき,

$$
\begin{aligned}
f(U) &= ff^{-1}(V) = \{f(y) \mid y \in f^{-1}(V)\} = \{f(y) \mid f(y) \in V\} \\
&= V \cap f(X) \subset V
\end{aligned}
$$

□

問題 1.7. X を位相空間, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする. このとき, 次を示せ.

(1) $U \subset Y$ が Y の開集合であるとは, $f^{-1}(U)$ が X の開集合であることと定義すると, Y は位相空間になる.

(2) (1) のようにして Y を位相空間と見るとき, f は連続写像である.

(3) (1) のようにして Y を位相空間と見るとき, $y \in Y - f(X)$ に対し, 一点集合 $\{y\}$ は Y の開かつ閉集合である.

証明. (1) $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$ だから, $\emptyset$ は Y の開集合である. $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$ だから, Y は Y の開集合である.

$U_\lambda \subset Y$ $(\lambda \in \Lambda)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) &= \{x \in X \mid f(x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \text{ある}\ \lambda\ \text{について}\ f(x) \in U_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \text{ある}\ \lambda\ \text{について}\ x \in f^{-1}(U_\lambda)\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda), \\
f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) &= \{x \in X \mid f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \text{任意の}\ \lambda\ \text{について}\ f(x) \in U_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \text{任意の}\ \lambda\ \text{について}\ x \in f^{-1}(U_\lambda)\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)
\end{aligned}$$

が成り立つ．以下，U_λ を Y の開集合とする．このとき，$f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合である．上の関係式から，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は Y の開集合となることがわかる．さらに，Λ を有限集合とすると，上の関係式から，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は Y の開集合となることがわかる．

(2) は明らかである．

(3) $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\} = \emptyset$ より，$\{y\}$ は開集合である．$f^{-1}(Y - \{y\}) = \{x \in X \mid f(x) \in Y - \{y\}\} = X$ より，$\{y\}$ は開集合である． □

問題 1.8. 次を示せ．X, Y を位相空間,$f : X \to Y$ を連続写像とする．$A \subset X$ とする．

(1) $f_A : A \to Y$ は連続である．

(2) $f : A \to f(A)$ は連続である．

証明. (1) Y の開集合 V に対し，$f_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$．$f$ は連続だから，$f^{-1}(V)$ は X の開集合である．相対位相の定義から，$f_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ は A の開集合である．

(2) $O \subset f(A)$ を $f(A)$ の開集合とすると，Y の開集合 U が存在して，$O = f(A) \cap U$．このとき，

$$\begin{aligned}
A \cap f^{-1}(O) &= \{a \in A \mid f(a) \in f(A) \cap U\} = \{a \in A \mid f(a) \in U\} \\
&= A \cap f^{-1}(U)
\end{aligned}$$

$f : X \to Y$ は連続だから，$f^{-1}(U)$ は X の開集合である．よって，$A \cap f^{-1}(O)$ は A の開集合である．ゆえに，$f : A \to f(A)$ は連続である． $\square$

問題 1.9. $f : X \to Y$ を位相空間 X, Y の間の連続写像とする．$A \subset X$ とする．次を示せ.

(1) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

(2) $\bar{A}$ が compact で，Y が Hausdorff ならば，$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

証明. (1) $\overline{f(A)}$ は閉集合で，f は連続だから，$f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合である (問題 1.5).

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) = \{x \in X \mid f(x) \in \overline{f(A)}\} \supset A$$

だから，$\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$．よって，

$$\begin{aligned} f(\bar{A}) &\subset ff^{-1}(\overline{f(A)}) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(\overline{f(A)})\} = \{f(x) \mid f(x) \in \overline{f(A)}\} \\ &= \overline{f(A)} \cap f(X) \subset \overline{f(A)} \end{aligned}$$

ゆえに，$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(2) $\bar{A}$ が compact で，f は連続だから，$f(\bar{A})$ は compact である (問題 1.13). Y は Hausdorff だから，$f(\bar{A})$ は Y の閉集合である（補題 1.13）．$A \subset \bar{A}$ より，$f(A) \subset f(\bar{A})$ だから，$\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$．(1) の結果と合わせて，$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. $\square$

問題 1.10. $a \in \mathbb{R}$ に対し，$O_a := (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ とおく．
$\mathfrak{O} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{O_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ とおく．次を示せ.

(1) $\mathfrak{O}$ は開集合系の公理を満たす.

(2) $(\mathbb{R}, \mathfrak{O})$ は Hausdorff ではない.

証明. (1) 開集合系の公理 (1), (2) を満たすことは明らかだから，(3) を示す．$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{R}$ に対し，$O_\lambda = O_{a_\lambda} = \{x \in \mathbb{R} \mid a_\lambda < x\}$ とおく．$a := \inf\{a_\lambda\} (\in \{-\infty\} \cup \mathbb{R})$ とおく．

• $a = -\infty$ のとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，ある a_λ が存在して，$a_\lambda < x$. このとき，$x \in O_\lambda \subset \bigcup O_\lambda$．ゆえに，$\bigcup O_\lambda = \mathbb{R}$.

• $a \in \mathbb{R}$ のとき，$\bigcup O_\lambda = O_a$ を示す．任意の λ に対し，$a \leq a_\lambda$ だから，$O_\lambda \subset O_a$．ゆえに，$\bigcup O_\lambda \subset Q_a$.

逆に，$x \in O_a$ をとると，$a < x$．$(a <)x$ は $\{a_\lambda\}$ の下界ではないから，$\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して，$x > a_{\lambda_0}$．このとき，$x \in O_{\lambda_0} \subset \bigcup O_\lambda$．ゆえに，$O_a \subset \bigcup O_\lambda$ となり，$\bigcup O_\lambda = O_a$ が示された．

(2) は明らかである． $\square$

問題 1.11. 次を示せ．A を位相空間 A の部分集合とする．A が compact になるための必要十分条件は,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \qquad (O_\lambda \text{ は } X \text{ の開集合})$$

となったとすると，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ が存在して，$A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$ となることである．

証明. $(\Rightarrow)$ $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする．U_λ は A の開集合だから，X の開集合 O_λ が存在して，$U_\lambda = O_\lambda \cap A$．このとき，$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$．仮定より，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して，$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$．このとき，$\{U_{\lambda_i} \mid i = 1, \cdots, m\}$ は A の被覆となる．ゆえに，A は compact である．

$(\Leftarrow)$ A を compact と仮定する．$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ (O_λ は X の開集合) となったとする．このとき，$U_\lambda := O_\lambda \cap A$ は A の開集合で $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$．$A$ は compact だから，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して，$A = \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$．$U_{\lambda_i} \subset O_{\lambda_i}$ だから，$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$． $\square$

問題 1.12. 2 つの compact 位相空間 X, Y の位相和 $X \cup Y$ は compact であることを示せ．

証明. $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $X \cup Y$ の開被覆とする．$\{O_\lambda \cap X \mid \lambda \in \Lambda\}$ と $\{O_\lambda \cap Y \mid \lambda \in \Lambda\}$ はそれぞれ X と Y の開被覆になる．X, Y はともに compact だから，ある $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_m\} \subset \Lambda$ が存在して，$\{O_{\lambda_i} \cap X \mid i = 1, \cdots, n\}$ と $\{O_{\mu_i} \cap Y \mid j = 1, \cdots, m\}$ はそれぞれ X と Y の開被覆になる．このとき，$O \subset \bigcup O_{\lambda_i}, Y \subset \bigcup O_{\mu_j}$ だから，$\{O_{\lambda_i}, O_{\mu_j} \mid i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m\}$ は $X \cup Y$ の開被覆になる． $\square$

問題 1.13. 次を示せ．X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を全射連続写像とする．このとき，X が compact ならば，Y も compact である．

証明. $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を Y の開被覆とすると,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$$

f は連続だから，$f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合，したがって，$\{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆になる．X は compact だから，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して，$\{f^{-1}(U_{\lambda_i}) \mid i = 1, \cdots, m\}$ は X の開被覆になる．f は全射だから

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_{\lambda_i})) = \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$$

よって，Y は compact である． □

問題 1.14. compact 位相空間 X の閉集合 A は compact であることを示せ．

証明. O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を X の開集合で，$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となるものとする．A は閉集合だから，$\{O_\lambda, X - A \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆となる．X は compact だから，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して，$\{O_{\lambda_i}, X - A \mid i = 1, \cdots, m\}$ は X の開被覆になる．よって，$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$．ゆえに，$A$ は compact である． □

問題 1.15. X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続な全単射とする．このとき，次の (1) ∼ (3) は同値であることを示せ．

(1) f は同相写像である．

(2) f は開写像である．

(3) f は閉写像である．

証明. (1)$\Leftrightarrow$ f^{-1} が連続 $\Leftrightarrow$ (2)．f は全単射だから，部分集合 $U \subset X$ に対し，$f(X - U) = Y - f(X)$．これより，(2)$\Leftrightarrow$ (3). □

問題 1.16. X, Y を位相空間とする．

(1) 全射 $p_X : X \times Y \to X; (x, y) \mapsto x$ と $p_Y : X \times Y \to Y; (x, y) \mapsto y$ は連続かつ開写像である．

(2) $X \times Y$ が compact ならば，X, Y はともに compact である．

証明. (1) $U \subset X$ を X の開集合とすると，$p_X^{-1}(U) = U \times Y$ は $X \times Y$ の開集合になるから，p_X は連続である．$O \subset X \times Y$ を開集合とすると X, Y のそれぞれの開集合 U_λ, V_λ が存在して，$O = \bigcup(U_\lambda \times V_\lambda)$．このとき，$p_X(O) = \bigcup U_\lambda$ は X の開集合だから，p_X は開写像である．p_Y についても同様である．

(2) (1) より p_X, p_Y は連続だから，問題 1.13 の結果より，X, Y は compact である． □

問題 1.17. 写像 $f:[0,2\pi)\to S^1;\theta\mapsto e^{i\theta}$ は連続な全単射であるが，逆写像は連続ではないことを示せ.

証明の方針. f が連続な全単射になることは明らかである．逆写像が連続でないことを示す.

証明 1. f が開写像ではないことを示せばよい．$[0,\pi)$ は $[0,2\pi)$ の開集合であるが，その像 $f([0,\pi))=\{e^{i\theta}\mid 0\leq\theta<\pi\}$ は S^1 の開集合ではない． □

証明 2. S^1 の点列 $a_n=e^{i(2\pi-\frac{1}{n})}$ について考える．明らかに，$\lim a_n=1, f^{-1}(1)=0$．$f^{-1}(a_n)=2\pi-\frac{1}{n}$ だから，$[0,2\pi)$ 内で $\lim f^{-1}(a_n)$ は収束しない．よって，f^{-1} は連続ではない. □

証明 3. $\pi_1([0,2\pi))=\{1\}$, $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$. □

証明 4. $[0,2\pi)$ は compact でない．S^1 は compact である. □

□

問題 1.18. X を Hausdorff 位相空間，A,B を X の compact 部分集合で，$A\cap B=\emptyset$ となるものとする．このとき，A,B をそれぞれ含む X の開集合 O_1,O_2 で $O_1\cap O_2=\emptyset$ となるものが存在することを示せ.

証明. A は compact だから，系 1.14 より，任意の $b\in B$ に対し，A を含む X の開集合 O_b と $b\in B$ の X における開近傍 U_b で $O_b\cap U_b=\emptyset$ となるものが存在する．$\{U_b\in b\in B\}$ は B の開被覆で，B は compact だから，B の有限開被覆 $\{U_j\mid j=1,\cdots,m\}$ がとれる．このとき，$O_1:=\bigcap_{j=1}^m O_{b_j}$ は A を含む X の開集合で，$O_2:=\bigcup_{k=1}^m U_{b_k}$ は B を含む X の開集合である．さらに，

$$O_1\cap O_2=\bigcap_{j=1}^m O_{b_j}\cap\bigcup_{k=1}^m U_{b_k}=\emptyset$$

となる. □

問題 1.19. 位相空間 X に位相群 G が左から連続に作用しているとする．このとき，連続な全射 $\pi:X\to G\backslash X$ は開写像であることを示せ.

問題 1.20. X を弧状連結位相空間，Y を位相空間，$f:X\to Y$ を全射連続写像とすると，Y も弧状連結位相空間となることを示せ.

証明. f は全射だから，$y_0, y_1 \in Y$ に対し，$x_0, x_1 \in X$ が存在して，$y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1)$．X は X を弧状連結 d だから，連続写像 $c : [0,1] \to X$ が存在して，$c(0) = x_0, c(1) = x_1$．このとき，連続写像 $f \circ c : [0,1] \to Y$ は $(f \circ c)(0) = y_0, (f \circ c)(1) = y_1$ を満たす．よって，Y も弧状連結である． □

問題 1.21. 弧状連結位相空間 X の任意の二点 $x, y \in X$ について，それらの基本群 $\pi_1(X, x)$ と $\pi_1(X, y)$ は群として同型になることを示せ．

証明. x と y を連続曲線 $\alpha(t)$ で結び，$\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ とする．$\Omega_1(X, x) \to \Omega_1(X, y); [c] \mapsto [\alpha c \alpha^{-1}]$ は群の同型写像を与える． □

問題 1.22. 次を示せ．compact 弧状連結位相空間 X 上で定義された連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の像 $f(X)$ はある有界閉区間 $[m, M]$ に一致する：$f(X) = [m, M]$.

証明. 定理 1.19 より，$m := \min f, M := \max f$ が存在する．このとき，$F(X) \subset [m, M]$．$m = f(x_0), M = f(x_1)$ と表示する．X は弧状連結だから，連続関数 $c : [0,1] \to X$ で，$x_0 = c(0), x_1 = c(1)$ となるものが存在する．連続関数 $f \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}$ は

$$(f \circ c)(0) = f(c(0)) = f(x_0) = m, \quad (f \circ c)(1) = M$$

を満たす．中間値の定理により，任意の $y \in [m, M]$ に対し，$t \in [0,1]$ が存在して，$y = (f \circ c)(t) = f(c(t))$．よって，$f(X) = [m, M]$． □

問題 1.23. [実射影空間] $x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ に対し，x と原点を通る直線を $\pi(x) = \mathbb{R}x$ と表す．$\mathbb{R}P^m := \{\pi(x) \mid x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}\} = (\mathbb{R}^{m+1} - \{0\})/\sim$ とおき，**実射影空間**という．ただし，$x \sim y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$．$\mathbb{R}P^m$ に商位相を入れる．次を示せ．

(1) 連続な全射 $\pi : \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^m; x \mapsto \pi(x)$ は開写像である．

(2) 全射 $\pi_{|S^m} : S^m \to \mathbb{R}P^m; x \mapsto \pi(x)$ は連続な開写像である．

(3) $\mathbb{R}P^m$ は compact である．

(4) $U_i := \{x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i > 0\}$ とおくと，$\{\pi(U_i) \mid i = 1, \cdots, m+1\}$ は $\mathbb{R}P^m$ の有限開被覆である．

(5) 次の写像は位相同型写像である．

$$\begin{aligned}\varphi_i : \pi(U_i) \to \mathbb{R}^m; [(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1})]\\ \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i} \cdots, \frac{x_{m+1}}{x_i}\right)\end{aligned}$$

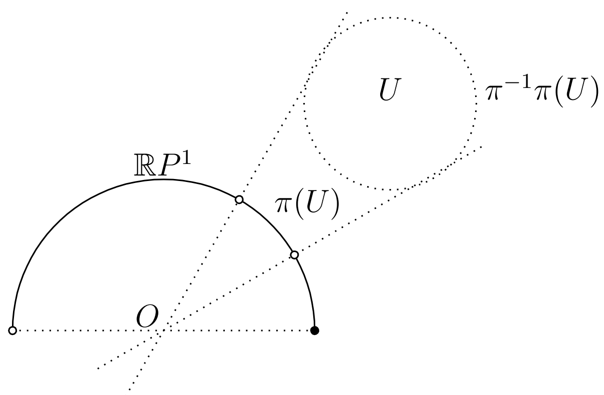
(6) $O(m+1)$ は自然に S^m に作用する．この作用は推移的である．さらにこの作用は $O(m+1)$ の $\mathbb{R}P^m$ への作用を誘導する．この作用も推移的である．この作用の $[e_{m+1}] \in \mathbb{R}P^m$ におけるイソトロピー部分群 $O(m+1)_{[e_{m+1}]}$ は

$$O(m+1)_{[e_{m+1}]} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \in O(m), \\ \epsilon = \pm 1 \end{array} \right\} = O(m) \times \{\pm 1\}$$

証明. (1) U を $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ の開集合とする．

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\pi(U) &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \mid \pi(x) \in \pi(U)\} \\ &= \mathbb{R}^{\times} U \qquad (\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} - \{0\}) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{\times}} xU\end{aligned}$$

xU は $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ の開集合だから，$\pi^{-1}\pi(U) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{\times}} xU$ は $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ の開集合である．これは $\pi(U)$ が $\mathbb{R}P^m$ の開集合であることを示している．ゆえに，π は開写像である．



(2) $\pi : \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^m$ は連続だから，問題 1.8, (2) の結果より，$\pi_{|S^m}$ も連続である．U を S^m の開集合とする．

$$\pi^{-1}\pi(U) = \{x \in S^m \mid \pi(x) \in \pi(U)\} = U \cup (-U)$$

$-U = \{-x \mid x \in U\}$ は S^m の開集合だから，$\pi^{-1}\pi(U) = U \cup (-U)$ は S^m の開集合である．これは，$\pi_{|S^m}$ が開写像であることを示している．

(3) (2) より，$\pi_{|S^m} : S^m \to \mathbb{R}P^m; x \mapsto \pi(x)$ は連続な全射である．S^m は compact(例 1.17) だから，問題 1.13 の結果より，$\mathbb{R}P^m$ は compact である．

(4) U_i は S^m の開集合だから，(2) より $\pi(U_i)$ は $\mathbb{R}P^m$ の開集合である．$x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ とすると，ある i が存在して，$x_i \neq 0$. このとき，$x_i > 0$ または $x_i < 0$．よって，$\pi(x) = \pi(-x) \in \pi(U_i)\}$．ゆえに，$\{\pi(U_i)\}$ は $\mathbb{R}P^m$ の開被覆である．

(5) φ_i の単射性：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{m+1}}{x_i}\right) = \left(\frac{y_1}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \cdots, \frac{y_{m+1}}{y_i}\right) \\
&\Rightarrow y_j = kx_j \ (j \neq i),\ k := y_i/x_i \\
&\Rightarrow y_j = kx_j \Leftrightarrow [(x_1, \cdots, x_{m+1})] = [(y_1, \cdots, y_{m+1})]
\end{aligned}$$

φ_i の逆写像は

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^m \to \pi(U_i); (y_1, \cdots, y_m) \mapsto [(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \cdots, y_m)]$$

よって，φ_i は全単射になる．

φ_i の連続性を示す．そのためには開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ に対し，$\varphi_i^{-1}(V) \subset \pi(U_i)$ が $\pi(U_i)$ の開集合になることを示せばよい．ここで，

$$\varphi_i^{-1}(V) = \{y \in \pi(U_i) \mid \varphi_i(y) \in V\}$$

$\varphi_i^{-1}(V)$ が $\pi(U_i)$ の開集合であることを示すためには，$\pi^{-1}(\varphi_i^{-1}(V))$ が $\mathbb{R}^{m+1}$ の開集合であることを示せばよい．ここで，

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\varphi_i^{-1}(V)) &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \mid \pi(x) \in \pi(U_i), \varphi_i(\pi(x)) \in V\} \\
&= \left\{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \,\middle|\, \begin{array}{l} (\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{m+1}}{x_i}) \in V, \\ x_i \neq 0 \end{array} \right\} \\
&= \{x_i(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_m) \mid (y_1, \cdots, y_m) \in V, x_i \neq 0\}
\end{aligned}$$

これは，$\mathbb{R}^{m+1}$ の開集合である．$\mathbb{R}P^m$ の位相の入れ方から，$\varphi_i^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}P^m$ の開集合である．ゆえに，φ_i は連続写像である．

最後に，φ_i が開写像であることを示す．$U \subset \pi(U_i)$ を開集合とする．そのために開集合 $U \subset \pi(U_i)$ に対し，$\varphi_i(U) \subset \mathbb{R}^m$ が開集合であることを示す．ここで，

$$\varphi_i(U) = \left\{ \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i} \cdots, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right) \middle| \, [(x_1, \cdots, x_m)] \in U \right\}$$

$$= \{(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \mid [(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1})] \in U\}$$

仮定より，$\pi^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の開集合である．ここで，

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(U) &= \{y \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \pi(y) \in U\} \\
&= \{(y_1, \cdots, y_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid y_i \neq 0, [(y_1, \cdots, y_{m+1})] \in U\} \\
&= \{k(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \\
&\qquad k \neq 0, [(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1})] \in U\} \\
&= \{k(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \\
&\qquad k \neq 0, (x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \in \varphi_i(U)\}
\end{aligned}$$

よって，$\varphi_i(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．

(6) $O(m+1) \curvearrowright S^m$ が推移的になることを自然数 m に関する数学的帰納法で示す．$m = 1$ のときは明らか．$m - 1$ のとき主張が成り立つと仮定して，m のときを考察する．自然に $O(m) \subset O(m+1), \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ と見なす．任意の $x \in S^m$ に対し，数学的帰納法の仮定より，$g_1 \in O(m) \subset O(m+1)$ が存在して，

$$g_1 x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

という形になる．$m = 1$ のとき，主張が成り立つので，$g_2 \in O(2) \subset O(m+1)$ が存在して，

$$(g_2 g_1)x = g_2(g_1 x) = g_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_{m+1}$$

ゆえに，$O(m+1) \curvearrowright S^m$ は推移的である．

次に $O(m+1) \curvearrowright \mathbb{R}P^m$ も推移的になることを示す．任意の $y \in \mathbb{R}P^m$ に対し，$x \in S^m$ が存在して，$y = \pi(x)$．すでに示したことから，$g \in O(m+1)$ が存在して，$gx = e_{m+1}$．このとき，$gy = g\pi(x) = \pi(gx) = \pi(e_{m+1})$．ゆえに，$O(m+1) \curvearrowright \mathbb{R}P^m$ も推移的である．イトロピー部分群は

$$\begin{aligned} O(m+1)_{[e_{m+1}]} &= \{g \in O(m+1) \mid ge_{m+1} \in \mathbb{R}e_{m+1}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \middle| A \in O(m), \epsilon = \pm 1 \right\} = O(m) \times \{\pm 1\} \end{aligned}$$

□

問題 1.24. M_1, M_2, N_1, N_2 を位相空間とする．M_1 と M_2 はホモトピー同値，N_1 と N_2 はホモトピー同値ならば，$M_1 \times N_1$ と $M_2 \times N_2$ はホモトピー同値になることを示せ．

証明. 仮定より，ホモトピー同値写像 $f_1 : M_1 \to M_2, f_2 : N_1 \to N_2$ が存在する．よって，連続写像 $g_1 : M_2 \to M_1, g_2 : N_2 \to N_1$ が存在して，$f_1 \circ g_1 \sim 1_{M_2}, g_1 \circ f_1 \sim 1_{M_1}, f_2 \circ g_2 \sim 1_{N_2}, g_2 \circ f_2 \sim 1_{N_1}$ が成り立つ．$f_1 \circ g_1$ と 1_{M_2}, $g_1 \circ f_1$ と 1_{M_1}, $f_2 \circ g_2$ と 1_{N_2}, $g_2 \circ f_2$ と 1_{N_1} を結ぶホモトピーをそれぞれ F_1, G_1, F_2, G_2 とする．このとき，

$$\begin{aligned} &(M_1 \times N_1) \times I \to M_1 \times N_1; (x, y, t) \mapsto (G_1(x, t), G_2(y, t)), \\ &(M_2 \times N_2) \times I \to M_2 \times N_2; (x, y, t) \mapsto (F_1(x, t), F_2(y, t)) \end{aligned}$$

はそれぞれ，$(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2$ と $1_{M_1 \times N_1}$，$(f_1 \times f_2) \circ (g_1 \times g_2)$ と $1_{M_2 \times N_2}$ を結ぶホモトピーとなる．よって，$M_1 \times N_1$ と $M_2 \times N_2$ はホモトピー同値になる． □

問題 1.25. 次を示せ．compact 位相空間 X に n 次元胞体 e^n を写像 ν で接着した空間 $X \cup_\nu e^n = (X \cup V^n)/\sim$ は compact である．

証明. 仮定より，X は compacr．V^n も compact(例 1.17) だから，位相和 $X \cup V^n$ は compact である (問題 1.12)．自然な射影 $X \cup V^n \to X \cup_\nu e^n$ は全射連続写像だから，$X \cup_\nu e^n$ も compact である (問題 1.13). □

問題 1.26. $X = V_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ に e^n を包含写像 $\iota : S^{n-1} \to X$ により，接着した空間 $X \cup_\iota e^n$ は S^n に位相同型であることを示せ．

証明. $V_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}(= V_+^n)$ とおき，位相和 $X \cup V_-^n$ を考える．写像

$$F : X \cup V_-^n \to S^n,$$
$$x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \quad (x \in X),$$
$$y \mapsto (y, -\sqrt{1 - \|y\|^2}) \quad (y \in V_-^n)$$

は全射連続写像であり，

$$F(p) = F(q) \Leftrightarrow p = q \text{ または } \|p\| = \|q\| = 1 \Leftrightarrow p \sim q$$

よって，F は全単射連続写像 $\tilde{F} : X \cup_\iota e^n \to S^n$ を引き起こす．X は compact(問題 1.12) だから，$X \cup_\iota e^n$ は compact(問題 1.25) である．S^n は Hausdorff だから，$\tilde{F}$ は位相同型写像である (命題 1.11). □

問題 1.27. 有限 CW 複体 $X = e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_n}$ と $\varphi(S^{\lambda_{n+1}-1}) \subset X^{\lambda_m - 1}$ を満たす特性写像 $\varphi : e^{\lambda_{n+1}} \to X$ について，有限 CW 複体 $X \cup_\varphi e^{\lambda_{n+1}}$ は

$$X \cup_\varphi e^{\lambda_{n+1}} = e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_n} \cup e^{\lambda n+1}$$

を満たすことを示せ.

問題 2.1. 座標変換 $\varphi_{\mu\lambda}$ は次を満たすことを示せ：

(1) $\varphi_{\lambda\lambda} = 1$

(2) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき，$\varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}$.

(3) $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$ のとき，$\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}$.

問題 2.2. L, M, N を C^∞ 級多様体とする．2 つの写像 $f : L \to M, g : M \to N$ が C^∞ 級ならば，合成写像 $g \circ f : L \to N$ も C^∞ 級であることを示せ.

証明. $x_0 \in L$ を任意に固定し，$y_0 = f(x_0) \in <, z_0 = g(y_0) \in N$ とおく．g は連続だから，z_0 の座標近傍 $(W; z_1, \cdots, z_n)$ に対し，y_0 の座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_m)$ を $g(V) \subset W$ ととれる．f は連続だから，x_0 の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_l)$ を $f(U) \subset V$ ととれる．f は C^∞ 級だから，C^∞ 級関数 $f_1, \cdots, f_m$ が存在して，$f = (f_1, \cdots, f_m)$, すなわち,

$$f(x_1, \cdots, x_l) = (f_1(x_1, \cdots, x_l), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_l))$$

g は C^∞ 級だから，C^∞ 級関数 $g_1, \cdots, g_n$ が存在して，$g = (g_1, \cdots, g_n)$, すなわち,

$$g(y_1, \cdots, y_m) = (g_1(y_1, \cdots, y_m), \cdots, g_n(y_1, \cdots, y_m))$$

このとき，$x = (x_1, \cdots, x_l)$ と略記すると,

$$(g \circ f)(x) = (g_1(f_1(x), \cdots, f_m(x)), \cdots, g_n(f_1(x), \cdots, f_m(x)))$$

Euclid 空間上の C^∞ 級関数と C^∞ 級関数の合成は C^∞ 級関数だから，$g \circ f$ は C^∞ 級である. $\square$

問題 2.3. $v \in T_p(M)$ とする．次を示せ.

(1) 定数関数 c に対し，$v(c) = 0$.

(2) $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\}$ は，$\mathbb{R}$ 上，線形独立である.

(3) $w = \sum_{i=1}^m v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p(M)$ とおく．$x_1, \cdots, x_m$ を変数とする多項式環 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 上で，$v = w$ が成り立つ.

(4) $g \in C^\infty(U)$ に対し，$v(g(x_1, \cdots, x_m)(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))) = 0$.

証明. (1) $v(1) = v(1 \cdot 1) = 1v(1) + v(1)1 = 2v(1)$ より，$v(1) = 0$．これを用いて $v(c) = v(c \cdot 1) = cv(1) = 0$.

(2), (4) は省略する.

(3) $f, g \in C^\infty(U)$ に対し，$v(f) = w(f), v(g) = w(g)$ となったとすると,

$$\begin{aligned} v(fg) &= f(p)v(g) + g(p)v(f) && (v\text{: 方向微分}) \\ &= f(p)w(g) + g(p)w(f) && (\text{仮定：} v(f) = w(f), v(g) = w(g)) \\ &= w(fg) && (w\text{: 方向微分}) \end{aligned}$$

また,

$$w(x_j) = \sum_{i=1}^m v(x_i) \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_p = v(x_j)$$

$\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ は $x_1, \cdots, x_m$ で生成されるから，$\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 上で，$v = w$. $\square$

問題 2.4. 2 つの C^∞ 級関数 $f, g : M \to \mathbb{R}$ に対し,

$$d(fg)_p = f(p)(dg)_p + g(p)(df)_p \in \mathrm{Hom}(T_p(M), \mathbb{R}) \tag{2.32}$$

が成り立つことを示せ.

証明. (2.16) より,

$$\begin{aligned}
d(fg)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &= \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(p) && \text{((2.16) より)}\\
&= f(p)\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) + g(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) && \text{(積の微分法)}\\
&= \{f(p)(dg)_p + g(p)(df)_p\}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p && \text{((2.16) より)}
\end{aligned}$$

ゆえに主張が得られる. □

問題 2.5. 標準 Riemann 計量をもつ $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数 f について,

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

となることを示せ.

証明. (2.19) より, $\langle \mathrm{grad}\ f, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. これより, 主張が得られる. □

問題 2.6. $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を Riemann 多様体, $f : N \to M$ をはめ込みとする. $T_x(N)$ の内積 $(\ ,\ )_x$ を

$$(u, v)_x = \langle (df)_x u, (df)_x v\rangle \qquad (u, v \in T_x(N))$$

と定めることにより, $(\ ,\ )$ は N 上の Riemann 計量になることを示せ.

証明. 各点 $x \in N$ で $(\ ,\ )_x$ が $T_x(N)$ 上の内積になることは明らかである. N 上の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対し, N 上の関数 $\langle X, Y\rangle$ が C^∞ 級になることをいう. f は連続だから, x のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ と $f(x)$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_m)$ を $f(U) \subset V$ ととれる(問題 1.6). f は C^∞ 級だから, $y_i = y_i(x_1, \cdots, x_n)$ は $(x_1, \cdots, x_n)$ の C^∞ 級関数である. (2.16) より

$$(df)_x(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}$$

内積 (,) の定義より，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \left\langle (df)_x \frac{\partial}{\partial x_i}, (df)_x \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle \qquad (\text{内積} (\ , \ ) \text{の定義}) \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\langle \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l}\rangle \qquad ((2.16) \text{より})
\end{aligned}
$$

ここで，$\frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \langle \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l}\rangle$ は C^∞ 級だから，$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ は C^∞ 級である． □

問題 2.7. Whitney の定理 (定理 2.43) と問題 2.6 の結果を用いて，σ compact C^∞ 級多様体には Riemann 計量が存在することを示せ.

問題 2.8. L を C^∞ 級多様体 N の部分多様体とする．C^∞ 級関数 $f : N \to \mathbb{R}$ に対し，$f|L : L \to \mathbb{R}$ も C^∞ 級であることを示せ.

問題 2.9. 次を示せ．r 個のベクトル $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{R}^n$ が線形独立になるための必要十分条件は $a_1, \cdots, a_r$ の **Gramm 行列** $(\langle a_i, a_j\rangle)_{1\le i,j\le r} \in M_r(\mathbb{R})$ が正則になることである.

証明. まず，次の関係に注意する：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r x_i a_i = 0 \Leftrightarrow \langle \sum_{j=1}^r x_j a_j, \sum_{i=1}^r x_i a_i\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^r x_j \langle a_j, \sum_{i=1}^r x_i a_i\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \langle a_j, \sum_{i=1}^r x_i a_i\rangle = 0 \quad (j = 1, \cdots, r) \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \cdots & \langle a_r, a_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_1, a_r\rangle & \cdots & \langle a_r, a_r\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

これを用いて，

$$
\begin{aligned}
a_1, \cdots, a_r \text{ が線形独立} &\Leftrightarrow \{(x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid \sum_{i=1}^r x_i a_i = 0\} = \{(0, \cdots, 0)\} \\
&\Leftrightarrow \{(x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid (2.33) = 0\} = \{(0, \cdots, 0)\} \\
&\Leftrightarrow (\langle a_i, a_j\rangle)_{1\le i,j\le r} \text{ が正則}
\end{aligned}
$$

□

問題 2.10. $\mathbb{R}^{2n}$ 自然に複素構造 J をもつ．任意の $p \in S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対し，$X_p = Jp$ とおくと，$p \mapsto X_p$ は S^{2n-1} 上のベクトル場になる．次を示せ.

(1) X は C^∞ 級ベクトル場である.

(2) 任意の $p \in S^{2n-1}$ に対し，$\|X_p\| = 1$.

問題 3.1. $(V; y_1, \cdots, y_m)$ を臨界点 p のまわりの他の座標近傍とすると，

$$(3.24) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)\right)_{1\le i,j\le m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(p)\right)_{1\le i,j\le m} {}^t\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)\right)_{1\le i,j\le m}$$

となることを示せ.

証明. チェインルールを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)$$

上の第二式を点 p で値をとると，p は臨界点だから，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \sum_{k,l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y_l \partial y_k}(p)\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p)$$

これを行列表示して主張が得られる. $\square$

問題 3.2. 次を示せ．$f : M \to \mathbb{R}$ が Morse 関数ならば，$-f$ も Morse 関数であり，f の臨界点全体のなす集合と $-f$ の臨界点全体のなす集合は一致する．臨界点 p における f の指数と $-f$ の指数の和は $\dim M$ である.

証明. $d(-f) = -df$ より，f の臨界点全体のなす集合と $-f$ の臨界点全体のなす集合は一致する．$H(-f) = -H(f)$ より，臨界点 p における f の指数と $-f$ の指数の和は $\dim M$ である. $\square$

問題 3.3. 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ 上の関数 f を

$$\begin{aligned}&f : T^2 \to \mathbb{R}; ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_2 + 2)y_2\\ &\text{ただし}\quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1\end{aligned}$$

と定める．f は Morse 関数であることを示せ．また，f の臨界点と臨界点における指数を求めよ.

証明．$(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1)$ または (x_2,y_2) は T^2 の局所座標系である．これより f は C^∞ 級関数であることがわかる．(x_1,y_2) または (x_2,y_2) が局所座標系のとき，

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}=x_2+2\geq 1 \text{ より } df\neq 0$$

(x_2,y_1) が局所座標系のとき，$-1<y_1<1$ であり，

$$f=\pm(x_2+2)\sqrt{1-y_1^2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=\pm\sqrt{1-y_1^2}\neq 0,\quad df\neq 0$$

(x_1,y_1) が局所座標系のとき，

$$\begin{aligned}
&f=\pm(2\pm\sqrt{1-x_1^2})\sqrt{1-y_1^2},\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1}=\pm\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\sqrt{1-y_1^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y_1}=\pm(2\pm\sqrt{1-x_1^2})\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}},\\
&df=0\Leftrightarrow(x_1,y_1)=(0,0)
\end{aligned}$$

臨界点は

$$\begin{aligned}
&p_1=((0,-1),(0,-1)),\quad &&p_2=((0,-1),(0,1)),\\
&p_3=((0,1),(0,1)), &&p_4=((0,1),(0,-1))
\end{aligned}$$

の 4 点である．各点 p_i において (x_1,y_1) は局所座標系になる．p_1 のまわりで $f=-(-\sqrt{1-x_1^2}+2)\sqrt{1-y_1^2}$ だから $f(p_1)=-1$.

$$H(f)(0,0)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

だから，p_1 において f は非退化で，指数は 1.

p_2 のまわりで $f=(-\sqrt{1-x_1^2}+2)\sqrt{1-y_1^2}$ だから $f(p_2)=1$.

$$H(f)(0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

だから，p_2 において f は非退化で，指数は 1.

p_3 のまわりで，$f=(\sqrt{1-x_1^2}+2)\sqrt{1-y_1^2}$ だから $f(p_3)=3$.

$$H(f)(0,0)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

だから，p_3 において f は非退化で，指数は 2.

p_4 のまわりで，$f = -(\sqrt{1-x_1^2}+2)\sqrt{1-y_1^2}$ だから $f(p_4) = -3$.

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから，p_4 において f は非退化で，指数は 0.

以上より，f は Morse 関数である． □

問題 3.4. 次を示せ．M を m 次元 compact C^∞ 級多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を Morse 関数とする．

(1) f が点 $p \in M$ で最小値をとれば，p は f の臨界点であり，p における f の指数は 0 になる．

(2) f が点 $q \in M$ で最大値をとれば，q は f の臨界点であり，q における f の指数は m になる．

証明．(1) p が f の臨界点になることは明らかである．f は Morse 関数だから，Morse の補題から，p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ を $x_i(p) = 0$ かつ (3.23) を満たすようにとれる．f は p で最小値をとるから，$r = 0$. よって，p における f の指数は 0 になる．(2) も同様である． □

問題 3.5. M, N をそれぞれ m, n 次元 C^∞ 級多様体とする．f, g をそれぞれ M, N 上の C^∞ 級関数とする．直積多様体 $M \times N$ 上の関数 $f+g$ を $(f+g)(x,y) = f(x) + g(y)$ $(x \in M, y \in N)$ と定める．このとき，次を示せ．

(1) $d(f+g)_{(p,q)} = 0 \Leftrightarrow (df)_p = 0, (dg)_q = 0$.

(2) (p,q) が $f+g$ の非退化臨界点になるための必要十分条件は，p, q がそれぞれ f, g の非退化臨界点になることである．このとき，$f+g$ の点 (p,q) における指数は，f の p における指数と g の q における指数の和になる．

(3) M, N は共に compact で，f, g はそれぞれ M, N の Morse 関数とする．$\{p_1, \cdots, p_k\}$, $\{q_1, \cdots, q_l\}$ をそれぞれ f, g の臨界点全部の集合とする．さらに，$\max_{i \neq j} |f(p_i) - f(p_j)| < \min_{i \neq j} |g(q_i) - g(q_j)|$ と仮定する．このとき，$f+g$ は $M \times N$ の Morse 関数である．

証明. (1)$d(f+g)_{(p,q)} = (df)_p + (dg)_q$ を用いる.

(2)　$f+g$ の Hesse 行列は,

$$H(f+g)_{(p,q)} = \begin{pmatrix} (Hf)_p & \\ & (Hg)_q \end{pmatrix}$$

となることを用いる.

(3) 命題 1.9 より, $M \times N$ は compact である. $f+g$ の臨界点は $\{(p_i, q_j)\}$. (2) より臨界点はすべて非退化だから, 証明すべきことは $(p_i, q_j), (p_k, q_l)$ に対し,

$$f(p_i) + g(q_j) = f(p_k) + g(q_l) \Leftrightarrow (p_i, q_j) = (p_k, q_l)$$

そこで, $f(p_i) + g(q_j) = f(p_k) + g(q_l)$ と仮定すると,

$$f(p_i) - f(p_k) = g(q_l) - g(q_j)$$

上の等式と, f, g が Morse 関数であることから, $i = k \Leftrightarrow j = l$. 今仮に $i \neq k$ となったとすると, $j \neq l$ であり, $|f(p_i) - f(p_k)| = |g(q_l) - g(q_j)|$. 他方で,

$$|f(p_i) - f(p_k)| \leq \max_{a \neq b} |f(p_a) - f(p_b)| < \min_{a \neq b} |g(q_a) - g(q_b)| \leq |g(q_l) - g(q_j)|$$

これは矛盾である. □

問題 3.6. 補題 3.25 の関数 μ に対し,

$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 + \mu(x_1^2 + 2x_2^2) = \epsilon\}$$

とおく. 次を示せ.

(1) $(x_1, x_2) \in D \Rightarrow (-x_1, x_2), (x_1, -x_2), (-x_1, -x_2) \in D$

(2) $b > 0$ が一意に存在して, $(0, b) \in D$

(3) 陰関数定理により, $x_1 = 0$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 $g(x_1)$ を $g(0) = b, x_1^2 - g(x_1)^2 + \mu(x_1^2 + 2g(x_1)^2) = \epsilon$ で定めることができる. このとき, $g(x_1)$ は偶関数である. さらに, $x_1 > 0$ のとき, $g(x_1)$ は単調増加である.

証明. (1) $(-x_1)^2 = x_1^2, (-x_2)^2 = x_2^2$ だから，主張が成り立つ.
(2) $\varphi(t) = -\frac{t}{2} + \mu(t) - \epsilon$ とおく. $\varphi'(t) = -\frac{1}{2} + \mu'(t) \leq -\frac{1}{2} < 0$ だから，$\varphi(t)$ は単調減少である．さらに，

$$\varphi(0) = \mu(0) - \epsilon > 0, \quad \varphi(2\epsilon) = -\epsilon + \mu(2\epsilon) = -\epsilon < 0$$

中間値の定理より，ただ一つの $0 < t_0 < 2\epsilon$ が存在して，$\varphi(t_0) = 0$. $b := \sqrt{t_0}$ が求めるものである. □

問題 3.7. (3.30) を用いて次を示せ.

$$\chi(S^m) = \begin{cases} 2 & (m : 偶数) \\ 0 & (m : 奇数) \end{cases}, \quad \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

証明. 例題 3.1 の結果より，

$$\chi(S^m) = (-1)^0 + (-1)^m = \begin{cases} 2 & (m : 偶数) \\ 0 & (m : 奇数) \end{cases}$$

例 3.6 より，

$$\chi(\Sigma_g) = (-1)^0 + 2g(-1)^1 + (-1)^2 = 2 - 2g$$

□

問題 3.8. (3.30) を用いて $\chi(\mathbb{R}P^m), \chi(\mathbb{C}P^m)$ の値をそれぞれ求めよ.

解答. 例 3.7 より

$$\chi(\mathbb{R}P^m) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^m = \begin{cases} 0 & (m : 奇数), \\ 1 & (m : 偶数) \end{cases}$$

例 3.9 より

$$\chi(\mathbb{C}P^m) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{2(i-1)} = \sum_{i=1}^{m+1} 1 = m + 1$$

□

問題 3.9. M, N を compact 多様体とする.
このとき，(3.30) を用いて $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$ を示せ.

証明. M, N それぞれの Morse 関数 f, g を問題 3.5, (3) のようにとる．p_i のおける f の指数を r_i，q_j における g の指数を s_j とする．問題 3.5, (3) の結果から，$f+g$ は $M \times N$ の Morse 関数で，問題 3.5, (2) より，臨界点の全体は $\{(p_i, q_j)\}$. (p_i, q_j) における $f+g$ の指数は，問題 3.5, (2) より，$r_i + s_j$ である．(3.30) より，

$$\begin{aligned}\chi(M \times N) &= \sum_{i,j} (-1)^{r_i + s_j} && ((3.30)\text{ より}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{r_i} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{s_j} = \chi(M)\chi(N) && ((3.30)\text{ より})\end{aligned}$$

□

問題 3.10. m 次元トーラス T^m の Euler 数 $\chi(T^m)$ を求めよ.

解答. 問題 3.7, 問題 3.9 の結果を用いて,

$$\begin{aligned}\chi(T^m) &= \chi(S^1 \times \cdots \times S^1) && (T^m = S^1 \times \cdots \times S^1) \\ &= (\chi(S^1))^m && (\text{問題 } 3.9) \\ &= 0 && (\text{問題 } 3.7)\end{aligned}$$

□

問題 4.1. 連続写像 $f : [a, b] \to [a, b]$ は不動点をもつことを示せ.

証明. $f(a) = a$ または $f(b) = b$ ならば，やることはないから，$f(a) \neq a$ かつ $f(b) \neq b$ と仮定する．このとき，$a < f(a) \leq b, b > f(b) \leq a$. $g(x) := f(x) - x$ は連続で，$g(a) = f(a) - a > 0$, $g(b) = f(b) - b < 0$．中間値の定理により，$a < c < b$ が存在して，$g(c) = 0$ すなわち，$f(c) = c$ となる. □

問題 4.2. Hausdorff 空間 X に位相群 G が左から連続に作用しているとする．$x_0 \in X$ における G のイソトロピー部分群 $G_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ は G の閉部分群であることを示せ.

証明 *1.* $G - G_{x_0}$ が開集合であることを示す．$g \in G - G_{x_0}$ をとり，固定する．$gx_0 \neq x_0$ で X は Hausdorff だから，gx_0, x_0 それぞれの X における開近傍 U, V が存在して，$U \cap V = \emptyset$. G の作用は連続だから，g の G における開近傍 W が存在して，$Wx_0 \subset U$．このとき，

$$Wx_0 \cap \{x_0\} \subset Wx_0 \cap V \subset U \cap V = \emptyset.$$

よって，$W \subset G - G_{x_0}$．ゆえに $G - G_{x_0}$ は開集合であり，G_{x_0} は閉集合である． □

証明 2. G の X への作用は連続だから，写像 $F : G \to X; g \mapsto gx_0$ は連続である．X は Hausdorff 空間だから，一点集合 $\{x_0\}$ は X の閉集合である（問題 1.1）．問題 1.5 の結果より，$F^{-1}(\{x_0\})$ は G の閉集合である．ここで，

$$\begin{aligned} F^{-1}(\{x_0\}) &= \{g \in G \mid F(g) = x_0\} && (F^{-1} \text{ の定義}) \\ &= \{g \in G \mid gx_0 = x_0\} && (F \text{ の定義}) \\ &= G_{x_0} && (G_{x_0} \text{ の定義}) \end{aligned}$$

だから，主張が従う． □

問題 4.3. X を無限集合とする．$O \subset X$ が開集合であると言うことを，$X - O$ が有限集合であるかまたは $O = \emptyset$ であることと定義する．

(1) 開集合の全体は開集合系の公理を満たすことを示せ．

(2) 空でない二つの開集合の交わりは，空でない開集合になることを示せ．

(3) X は Hausdorff 空間か?

解答. (1) (i) $X - X = \emptyset$ より，X は開集合である．開集合の定義より $\emptyset$ も開集合である．(ii) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を開集合とする．ドモルガンの法則より $X - \bigcup_\lambda O_\lambda = \bigcap_\lambda (X - O_\lambda)$ これは有限集合 $X - O_\lambda$ の交わりだから，有限集合である．ゆえに，$\bigcup_\lambda O_\lambda$ は開集合である．(2) の解答と合わせて開集合の全体は開集合系の公理を満たす．

(2) O_1, O_2 をともに空でない開集合とする．このとき，$X - O_i$ は有限集合である．$O_1 \cap O_2$ の補集合は，ドモルガンの法則より

$$X - O_1 \cap O_2 = (X - O_1) \cup (X - O_2) : \text{有限集合}$$

よって，$O_1 \cap O_2$ は開集合である．仮に，$O_1 \cap O_2 = \emptyset$ となったとすると，$X - O_1 \cap O_2 = X$ は無限集合となり，矛盾が起こる．ゆえに，$O_1 \cap O_2$ は空でない開集合である．

(3) (2) より，Hausdorff 空間ではない． □

問題 4.4. $\mathbb{R}$ に次で同値関係 $\sim$ を入れる：$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. x の同値類を $[x]$ と表す．$\mathbb{R}/\sim$ に商位相を入れる．$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ で自然な射影を表す.

(1) 一点集合 $\{[0]\}$ は閉集合か?

(2) $\mathbb{R}/\sim$ は Hausdorff 空間か?

解答. (1) 商位相の入れ方から $\{[0]\}$：閉 $\Leftrightarrow \pi^{-1}[0] = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$：閉．$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合ではないから，$\{[0]\}$ は $\mathbb{R}/\sim$ の閉集合ではない.

(2) (1) と問題 1.1 の結果から，$\mathbb{R}/\sim$ は Hausdorff 空間ではない． □

問題 4.5. B, F を Hausdorff 位相空間，E を位相空間とする．連続写像 $\pi : E \to B$ は次を満たすとする：任意の $b \in B$ に対し，b の B における開近傍 U_b と位相同型写像 $h = (p_1, p_2) : \pi^{-1}(U_b) \to U_b \times F$ が存在して，$p_1(z) = \pi(z)$．このとき，E は Hausdorff 空間であることを示せ.

証明. $x, y \in E, x \neq y$ と仮定する.

(1) $\pi(x) \neq \pi(y)$ のとき：

B は Hausdorff 空間だから，$\pi(x), \pi(y)$ のそれぞれの B における開近傍 $U_{\pi(x)}, U_{\pi(y)}$ で $U_{\pi(x)} \cap U_{\pi(y)} = \emptyset$ となるものが存在する．π は連続だから，$\pi^{-1}(U_{\pi(x)}), \pi^{-1}(U_{\pi(y)})$ はそれぞれ E の開集合である．$\pi(x) \in U_{\pi(x)}$ だから，$x \in \pi^{-1}(U_{\pi(x)})$．よって，$\pi^{-1}(U_{\pi(x)})$ は x の開近傍である．同様に，$\pi^{-1}(U_{\pi(y)})$ は y の開近傍である．$U_{\pi(x)} \cap U_{\pi(y)} = \emptyset$ より，$\pi^{-1}(U_{\pi(x)}) \cap \pi^{-1}(U_{\pi(y)}) = \emptyset$.

(2) $b := \pi(x) = \pi(y)$ のとき：

仮定より，b の B における開近傍 U と位相同型写像 $h = (\pi, p_2) : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ が存在する．h は (全) 単射で，$x \neq y$ だから，$h(x) \neq h(y)$．$\pi(x) = \pi(y)$ だから，$p_2(x) \neq p_2(y)$．F は Hausdorff 空間だから，$p_2(x), p_2(y)$ それぞれの F における開近傍 $V_{p_2(x)}$ と $V_{p_2(y)}$ が存在して，$V_{p_2(x)} \cap V_{p_2(y)} = \emptyset$．$h = (\pi, p_2)$ は連続だから，p_2 も連続である．よって，$p_2^{-1}(V_{p_2(x)})$ と $p_2^{-1}(V_{p_2(y)})$ はそれぞれ E の開集合である．$p_2(x) \in V_{p_2(x)}$ より，$p_2^{-1}(V_{p_2(x)})$ は x の開近傍である．同様に，$p_2^{-1}(V_{p_2(y)})$ は y の開近傍である．$V_{p_2(x)} \cap V_{p_2(y)} = \emptyset$ より，$p_2^{-1}(V_{p_2(x)}) \cap p_2^{-1}(V_{p_2(y)}) = \emptyset$． □

問題 4.6. 写像

$$
\begin{aligned}
f :&\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2; \\
&z \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{\|z\|^2+1}\mathrm{Re}(z) \\ \frac{2}{\|z\|^2+1}\mathrm{Im}(z) \\ \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \end{pmatrix}, \infty \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

について，次の問に答えよ．

(1) $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \neq 1$ を示せ．

(2) f は全単射になることを示せ．

(3) f が位相同型写像になるように，$\mathbb{C}$ に位相を入れると，∞ の近傍はどのようになるか？

解答. (1) $\frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} = 1 \Leftrightarrow \|z\|^2 - 1 = \|z\|^2 + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$(矛盾)

(2) まず，f が単射になることを示す．$f(z) = f(w)$ $(z, w \in \mathbb{C})$ となったとすると，$k > 0$ が存在して，$w = kz$．このとき，

$$
\frac{k^2\|z\|^2 - 1}{k^2\|z\|^2 + 1} = \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1}
$$

これより，$k = 1$ または $z = 0$．$k = 1$ のとき，$z = w$．$z = 0$ のとき，$w = z = 0$．いずれの場合にも $z = w$ となり，f は単射となる．

次に，f が全射になることを示す．

$$
\begin{aligned}
&f^{-1} : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \\
&\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad (x_3 \neq 1), \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \infty
\end{aligned}
$$

が f の逆写像になる．特に，f は全射である．

(3) □

問題 4.7. G を (Hausdorff 空間とは仮定しない) 位相群，H を G の部分群とする．G/H が Hausdorff 空間となるための必要十分条件は H が G の閉部分群となることである．これを示せ．

証明. $\pi : G \to G/H$ で自然な射影を表すと，π は連続開写像である．開写像になることは，$U \subset G$ に対し，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{x \in G \mid \pi(x) \in \pi(U)\} = UH = \bigcup_{x \in H} Ux$$

となることから従う．

($\Rightarrow$) G/H を Hausdorff とすると，一点集合 $\{\pi(e)\}$ は G/H の閉集合である．π は連続だから，$\pi^{-1}\{\pi(e)\} = H$ は G の閉集合である (問題 1.5)．

($\Leftarrow$) H を G の閉集合とする．$\pi(a) \neq \pi(b)$ とすると，$a^{-1}b \notin H$．H は G の閉集合だから，e の開近傍 U で $a^{-1}bU \cap H = \emptyset$ となるものが存在する．写像 $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ は連続だから，e の開近傍 V で $(aV)^{-1}bV \subset a^{-1}bU$ となるものが存在する．π は開写像だから，$\pi(aV), \pi(bV)$ はそれぞれ $\pi(a), \pi(b)$ の開近傍である．このとき，$(aV)^{-1}bV \cap H \subset a^{-1}bU \cap H = \emptyset$．よって，$(aV)^{-1}bV \cap H = \emptyset$ となり，これより，$\pi(aV) \cap \pi(bV) = \emptyset$ が得られる．ゆえに，G/H は Hausdorff 空間である．$\square$

問題 4.8. M を m 次元 C^∞ 級多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数，$(U; x_1, \cdots, x_m)$ を M の座標近傍とする．U 上に f の退化した臨界点が存在しないための必要十分条件は，U 上で

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| > 0$$

が成り立つことである．これを示せ．

証明. $df = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = 0$ だから，

$$\begin{aligned}
&U \text{ 上に } f \text{ の退化した臨界点が存在しない} \\
&\Leftrightarrow (df)_p \neq 0 \text{ または } (df)_p = 0, \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| > 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| > 0 \text{ または} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = 0, \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| > 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| > 0
\end{aligned}$$

$\square$

問題 4.9. compact 多様体 M に対し座標近傍からなる有限開被覆 $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ と U_i の compact 集合 K_i で，$M = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ となるものが存在することを示せ.

証明. $p \in M$ に対し，p を含む座標近傍 U_p をとると，$\{U_p\}_{p\in M}$ は M の開被覆である．M は compact だから，$\{U_p\}$ から有限開被覆 $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ がとれる．各 $q \in U_i$ に対し，q を含む U_i の compact 集合 $K_{q,i}$ で，$\{\mathrm{int}(K_{q,i}) \mid q \in U_i\}$ が U_i の開被覆となるものがとれる．このとき，$\{\mathrm{int}(K_{q,i}) \mid q \in U_i, 1 \leq i \leq n\}$ は M の開被覆で，M は comoact だから，M の有限開被覆 $\{\mathrm{int}(K_{j,i} \mid 1 \leq j \leq j_i, 1 \leq i \leq n\}$ がとれる．$K_i = \bigcup_{1\ eqj\leq j_i} K_{j,i}$ とおくと，$M = \bigcup_{i=1}^n K_i$ であり，各 $K_{j,i}$ は compact だから，その有限和である K_i も compact である. □

問題 4.10. 二つの文字 x_1, x_2 で生成される自由群に関係式 $x_1^2x_2^2 = 1, x_1x_2 = x_2x_1$ を入れたものは加法群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ に同型であることを示せ.

$$\langle x_1, x_2 \mid x_1^2x_2^2 = 1, x_1x_2 = x_2x_1\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

証明. $G := \langle x_1, x_2 \mid x_1^2x_2^2 = 1, x_1x_2 = x_2x_1\rangle, y := x_1x_2$ とおくと，$y^2 = 1$. $x_1x_2 = x_2x_1$ より，$x_1y = yx_1, x_2y = yx_2$．$x_1x_2 = x_2x_1$ より，G の任意の元は $x_1^nx_2^m$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ と表される．ここで，$x_1^nx_2^m = x_1^{n-m}x_1^mx_2^m = x_1^{n-m}y^m$ だから，G の任意の元は $x_1^ny^l (l = 0, 1)$ と表される．$m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{aligned}
x_1^my^p = x_1^ny^q &\Leftrightarrow x_1^{m+p}x_2^p = x_1^{n+q}x_2^q \\
&\Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}\text{ が存在して } n + q = m + p + 2k, q = p + 2k \\
&\Leftrightarrow m = n,\ [p] = [q] \in \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

よって，写像 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \to G; (m, [n]) \mapsto x_1^my^n$ は群の同型写像になる. □

問題 4.11. M を C^∞ 級多様体とし，$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$ とおく．$\pi : T(M) \to M$ で自然な射影を表す．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を M の局所座標系による開被覆とする．全単射 h_α を

$$h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m; \sum y_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto (p, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha)$$

と定める．このとき，次を示せ.

(1) $U \subset T(M)$ が開集合であることを任意の $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対し，$h_\alpha(U \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ が $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ の開集合であることと定義すると，$T(M)$ の開集合全体は開集合系の公理を満たす．$\pi^{-1}(U_\alpha)$ は $T(M)$ の開集合である.

(2) h_α は位相同型写像である．

(3) π は連続開写像である．特に，$T(M)$ は Hausdorff 位相空間になる．

(4) $T(M)$ は $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), h_\alpha, (x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha)\}$ を局所座標系とする $2m$ 次元 C^∞ 級多様体になる．

(5) π は C^∞ 級写像である．

$T(M)$ を M の**接束**という．

証明．(1) $\emptyset, T(M)$ が $T(M)$ の開集合になることは明らかである．$U_1, U_2 \subset T(M)$ を $T(M)$ の開集合とする．任意の α に対し，h_α は単射だから，

$$h_\alpha((U_1 \cap U_2) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = h_\alpha(U_1 \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) \cap h_\alpha(U_2 \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$$

よって，$U_1 \cap U_2$ は $T(M)$ の開集合である．$U_\lambda \subset T(M)$ $(\lambda \in \Lambda)$ を $T(M)$ の開集合とすると，

$$\begin{aligned} h_\alpha((\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) &= h_\alpha(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \cap \pi^{-1}(U_\alpha))) \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} h_\alpha(U_\lambda \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) \end{aligned}$$

よって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $T(M)$ の開集合である．$\pi^{-1}(U_\alpha)$ が $T(M)$ の開集合になることを示す．任意の β について，

$$h_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = h_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \subset U_\beta \times \mathbb{R}^m$$

$(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$ は $U_\beta \times \mathbb{R}^m$ の開集合だから，$\pi^{-1}(U_\alpha)$ は $T(M)$ の開集合である．

(2) $T(M)$ の開集合の定義から，明らかに h_α は開写像になる．h_α は全単射だから，$V \subset U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ を $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ の開集合とすると，$h_\alpha(h_\alpha^{-1}(V)) = V$．よって，$h_\alpha(h_\alpha^{-1}(V))$ は $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ の開集合である．$T(M)$ の開集合の定め方から，$h_\alpha^{-1}(V)$ は $T(M)$ の開集合になる．よって，h_α は位相同型写像である．問題 4.5 の結果より，$T(M)$ は Hausdorff 空間になる．

(3) $O \subset M$ を M の開集合とする．$h_\alpha(\pi^{-1}(O) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = (U_\alpha \cap O) \times \mathbb{R}^m$ だから，$h_\alpha(\pi^{-1}(O) \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ は $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ の開集合である．$T(M)$ の位相の入れ方から O は $T(M)$ の開集合である．ゆえに，$\pi^{-1}(O)$ は $T(M)$

の開集合である．よって，π は連続である．π が開写像であることを示す．$U \subset T(M)$ を $T(M)$ の開集合とする．このとき，

$$\begin{aligned}\pi(U) &= \pi(U \cap T(M)) = \pi(U \cap \bigcup \pi^{-1}(U_\alpha)) = \pi(\bigcup (U \cap \pi^{-1}(U_\alpha)))\\ &= \bigcup \pi(U \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = \bigcup (\pi(U) \cap U_\alpha)\end{aligned}$$

$h_\alpha(U \cap U_\alpha)$ は $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ の開集合で，$\pi(U) \cap U_\alpha$ は $h_\alpha(U \cap U_\alpha)$ の第一成分への射影だから，U_α の開集合である．U_α は M の開集合だから，$\pi(U) \cap U_\alpha$ は M の開集合である．よって，$\pi(U)$ は M の開集合となり，π は開写像である．

(5) π を局所座標系 $(\pi^{-1}(U_\alpha), h_\alpha, (x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha)$ 上で書けば，$(x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha) \mapsto (x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha)$ となるので，C^∞ 級である．

$\square$

問題 4.12. B, M を C^∞ 級多様体とする．$\pi : B \to M$ を全射 C^∞ 級写像とする．V を有限次元実ベクトル空間とする．各 $x \in M$ に対し $\pi^{-1}(x)(\subset B)$ は V と同型なベクトル空間とする．$\varphi_x : \pi^{-1}(x) \to V$ で線形同型写像を表す．M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と微分同型写像

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$$

が存在して，$\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}(u) = (\pi(u), \varphi_x(u))$ が成り立つとする．このとき，B を M 上の**ベクトル束**という．次を示せ．

(1) $\pi : M \times V \to M; (x, v) \to x$ と定めると，$M \times V$ は M 上のベクトル束になることを示せ．

(2) 接束 $T(M)$ は M 上のベクトル束となることを示せ．

問題 4.13. $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{2n^2}$ の n^2-1 次元と $2n^2-2$ 次元の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

証明. 始めに $SL(n, \mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^{n^2}$ の n^2-1 次元部分多様体であることを示す．C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ を

$$f(X) = \det(X) \qquad (X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2})$$

と定めると，$SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid f(X) = 1\}$.

$$(df)_X = \begin{vmatrix} dx_{11} & \cdots & dx_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \\ dx_{n1} & \cdots & dx_{nn} \end{vmatrix} = \sum X_{ij} dx_{ij}$$

ただし，X の余因子行列 $\tilde{X}$ の (i,j) 成分を X_{ij} と表し，第二式の第 i 項を第 i 行に関して余因子展開した．$X \in SL(n,\mathbb{R})$ に対し，X は正則行列だから，$\tilde{X} \neq O$．よって，$SL(n,\mathbb{R})$ 上で $df \neq 0$．系 2.50, (1) より主張が成り立つ．

次に $SL(n,\mathbb{C})$ が $\mathbb{R}^{2n^2}$ の $2n^2-2$ 次元部分多様体であることを示す．C^∞ 級関数 $f,g:\mathbb{R}^{2n^2}\to\mathbb{R}$ を

$$f(Z)=\mathrm{Re}(\det(Z)),\quad g(Z)=\mathrm{Im}(\det(Z))\quad (Z=(z_{ij})\in M_n(\mathbb{C})=\mathbb{R}^{2n^2})$$

と定めると，$SL(n,\mathbb{C})=\{X\in M_n(\mathbb{R})\mid f(Z)=1, g(Z)=0\}$．

$$\begin{aligned}
d(f+ig)_Z &= \begin{vmatrix} dz_{11} & \cdots & dz_{1n} \\ z_{21} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n-1,1} & \cdots & z_{n-1,n} \\ dz_{n1} & \cdots & dz_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum (Z_{ij}dx_{ij} + iZ_{ij}dy_{ij}) = \sum Z_{ij}dz_{ij}
\end{aligned}$$

ただし，Z の余因子行列 $\tilde{Z}$ の (i,j) 成分を Z_{ij} と表した．実部と虚部に分けて書くと

$$\begin{aligned}
(df)_Z &= \sum(\mathrm{Re}(Z_{ij})dx_{ij} - \mathrm{Im}(Z_{ij})dy_{ij}), \\
(dg)_Z &= \sum(\mathrm{Re}(Z_{ij})dy_{ij} + \mathrm{Im}(Z_{ij})dx_{ij})
\end{aligned}$$

$a,b\in\mathbb{R}$ に対し，$a(df)_Z + b(df)_Z = 0$ と仮定すると，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Z_{ij}) & \mathrm{Im}(Z_{ij}) \\ -\mathrm{Im}(Z_{ij}) & \mathrm{Re}(Z_{ij}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Z\in SL(n,\mathbb{C})$ のとき，Z は正則だから，$\tilde{Z}\neq O$．特に，ある (i,j) に対し，$Z_{ij}\neq 0$．これより，$a=b=0$ が得られる．すなわち，df, dg は $SL(n,\mathbb{C})$ 上で線形独立である．ゆえに主張が従う． □