

振動する翼周りの流れに対する  
ハイブリッド型非構造移動格子有限体積法\*山川勝史\*<sup>1</sup>, 浅川弘也\*<sup>2</sup>, 松野謙一\*<sup>3</sup>Unstructured Hybrid Moving-Grid Finite-Volume Method  
for a Flow Around a Pitching AirfoilMasashi YAMAKAWA \*<sup>4</sup>, Hiroya ASAKAWA and Kenichi MATSUNO\*<sup>4</sup> Division of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,  
Gosyokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

Computing a flow around a pitching airfoil, the unstructured moving-grid finite-volume method is developed in this paper. The method has been proposed for various moving boundary problems. However, it is limited for compressible inviscid flows. In the case of calculating a viscous flow at high Reynolds number as a flow around a pitching airfoil, it is necessary to solve a boundary layer. So, a hybrid grid system of a prismatic mesh for boundary layer region and tetrahedral mesh for other regions is suitable. In this paper, the unstructured hybrid moving-grid finite-volume method is formulated in four dimensional space-time unified domain to satisfy a geometric conservation law on such a moving grid in addition to satisfy a physical conservation law. The method is apply to a flow around a pitching NACA 0012 airfoil, then the results show that the method is effective for a high Reynolds number viscous flow around a moving body.

**Key Words**: Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Viscous Flow, Airfoil, Moving Boundary Problem

## 1. 緒 言

翼振動問題は航空機設計における重要なテーマであり、今日においても数多くの研究がなされている。またこれらの研究は計算手法の検討から実機設計に至るまで非常に広範囲に及んでいる。さて、本問題を取り扱う上で数値流体力学は実験的手法と並んで一つの地位を確保している。しかしコスト面および信頼面において実験的手法に逼迫してはいるが、計算結果単体での運用は実用化に至っていない。つまり計算であたりを付け、製作した翼による実験で確かめるのが常である。通常、定常流中の翼周りの計算結果はほぼ実験結果と一致する。また流れそのものにより生じる非定常場においても十分実用レベルにある。これに対し計算が実用レベルに達していない(到底実験レスで製作できない)ものとして翼の変形や変動により誘起される非定常場が挙げられる。その一例が本題で取り上げる翼振動問題である。このような非定常問題が実用レベルに達しない大きな原因の一つが翼の

動き、つまり計算時に格子が移動することによる計算誤差の発生である。この格子移動による誤差を無くするためには幾何保存則<sup>①</sup>を満足させれば良いことはわかっている。しかしその取り扱い、特にプログラミングの難易度の高さにより、計算格子を細かくすることで誤差量を低減しているのが現状である。格子はいくら細かくしても誤差量を0にすることはできない(単純には $10^{-10}$ 程度まで細かくすると機械誤差0となるが現実的ではない)ことから、この幾何保存則を満たすような数値計算法を用いることは有意であると考えられる。

さて、著者らは幾何保存則を満足する計算手法として非構造移動格子有限体積法<sup>②</sup>を提案してきた。しかし本手法は非粘性圧縮性流体に限定するもので、実用化というレベルには到達していない。本論文では振動する翼周りの流れを取り上げ、この流れ場を精度良く計算することを目的とする。そのためにまず、三次元粘性流体に対する非構造格子としてテトラとプリズムのハイブリッド格子を採用することとなる。よって、まずこの①ハイブリッド格子について移動格子有限体積法を定式化する必要がある。次に定式化した本手法をプログラミングし、②幾何保存則が本当に満足しているかを検証する。この検証の後③実際に格子移動が必要となり且つ厳密解の存在

\* 原稿受付 2008年9月19日。

\*<sup>1</sup> 正員, 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。\*<sup>2</sup> 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科。\*<sup>3</sup> 正員, フェロー, 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科。

E-mail: yamakawa@kit.ac.jp

する粘性圧縮性流れ場に適用し検証を行う。ここまでで本手法に問題が無いことを確認した上で④振動する翼周りの流れ場へ適用し実験結果と比較することで本手法の有効性を示す。

2. ハイブリッド型非構造移動格子有限体積法

粘性圧縮性流体、特に翼周りといった高レイノルズ数流れを対象とするので三次元非構造格子系では、テトラプリズムのハイブリッド格子が効率的である。本章ではこのハイブリッド型格子に対し移動格子有限体積法を定式化する。

まず本論文で用いる流れの基礎方程式として式(1)に示す発散形表示させた三次元ナビエ・ストークス方程式を用いる。

$$\tilde{\nabla} \tilde{F} = 0 \tag{1}$$

ここで  $\tilde{\nabla}$  は  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t)$ ,  $\tilde{F}$  は  $(E - E_V/Re, F - F_V/Re, G - G_V/Re, q)$  であり、

$E, F, G$  および  $E_V, F_V, G_V$  は  $x, y, z$  方向の非粘性流束ベクトルおよび粘性流束ベクトル、 $q$  は保存量ベクトル、 $Re$  はレイノルズ数を示している。

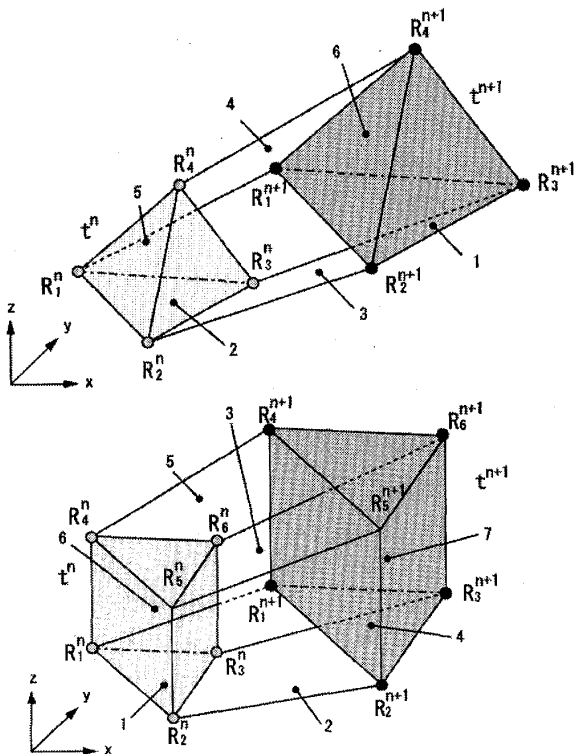


Fig. 1 Control volume

(Upper : tetrahedral element, Lower : Prismatic element)

本式に対し、幾何保存則を満たすよう、図1に示すコントロールボリュームについて有限体積法を適用する。図1において  $R = (x, y, z, t)$  であり下付き文字は頂点番号を上付き文字は時間段階を示している。つまりテトラ格子なら四面体が移動することにより8点で、またプリズム格子なら10点でそれぞれ構成される時間-空間の統一検査体積について、式(1)を積分することになる。式(1)を積分しガウスの発散定理を適用すると次式を得る。

$$\sum_{l=1}^{N_S+2} (qn_l + \Phi)_l dS_l = 0 \tag{2}$$

ここで  $l$  は検査体積の境界を表すが、検査体積が時空間の四次元であるため、その境界は三次元つまり体積(境界体)となる。 $\Phi$  は非粘性、粘性流束ベクトルの和で次のように表され、また  $n_l = (n_x, n_y, n_z, n_t)_l$ ,  $(l=1, 2, \dots, N_S+2)$  は各境界における外向きの法線ベクトルを示している。ここで  $N_S$  は各要素の境界数であり、プリズムなら  $N_S=5$  となる。

$$\Phi = H - H_V \tag{3}$$

$$H = En_x + Fn_y + Gn_z \tag{4}$$

$$H_V = (E_V n_x + F_V n_y + G_V n_z) / Re \tag{5}$$

ここで、境界体について詳しく述べると、 $l=1, 2, \dots, N_S$  については各要素の境界面が  $n$  時間段階から  $n+1$  時間段階への移動時、つまり面移動により押しのけられた体積を示している。また  $l=N_S+1$  および  $l=N_S+2$  については  $n$  および  $n+1$  時間段階の要素そのものを示す。当然ながら  $l=N_S+1$  および  $l=N_S+2$  の境界体に対する法線ベクトルは時間成分しか持たないので、式(2)を整理すると最終的に以下となる。

$$q^{n+1}(n_l)_{N_S+2} + q^n(n_l)_{N_S+1} + \sum_{l=1}^{N_S} (q^{n+1/2} n_l + \Phi^{n+1/2})_l dS_l = 0 \tag{6}$$

ここで $q^{n+1/2}$ らの評価は各時間段階の平均をとるとクランク・ニコルソン型となり時間2次精度となる。よって一般的にはこの方法を用いる。ただしレイノルズ数が $10^6$ 以上になると安定性が非常に厳しくなるので、この場合時間1次精度となるが $q^{n+1/2} = q^{n+1}$ と評価する後退オイラー型を用いる。

最終的には式(6)を計算することにより幾何保存則を満足させたまま移動する格子上でナビエ・ストークス方程式を解くことができる。本論文における有限体積法はセル中心法を採用した。流束ベクトルは非粘性項についてはRoeのFDS法<sup>9)</sup>を用い、MUSCL法にて高次精度化した後Venkatakrishnan<sup>10)</sup>により提案された制限関数を使用した。粘性項については中心差分的に評価した。また式(6)は $n+1$ 段階の項を含む陰的スキームとなっているため反復法にて解くことになる。本論文では擬似時間内部反復法<sup>9)</sup>を用い、擬似時間の進行にはLU-SGS陰解法<sup>9)</sup>を用いた。

### 3. 検証問題

**3・1 スキームの検証** ハイブリッド型非構造移動格子有限体積法について、まずスキームの検証を行った。図2のように下半分にテトラ、上半分にプリズムを配置したハイブリッド格子に一樣流( $u=v=w=1.0$ )を流し、格子移動時の一樣流に対する誤差量の履歴を調べた。

計算格子は $1 \times 1 \times 1$ の計算領域内にテトラ格子を30,320個、プリズム格子を8,000個配置し、式(7)により内点を動かしている。

$$\begin{cases} x_i^n = \bar{x}_i + 0.4\Delta x \sin \theta_i^n \\ y_i^n = \bar{y}_i + 0.4\Delta y \cos \theta_i^n \\ z_i^n = \bar{z}_i + 0.4\Delta z \sin \theta_i^n \end{cases} \quad (7)$$

$$\theta_i^n = \frac{\pi}{2} (\bar{x}_i + \bar{y}_i + \bar{z}_i) \cdot n\Delta t$$

ここで $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ は $t=0$ での各節点の座標値を表している。境界上の点は固定とし、境界条件として一樣流を与えている。レイノルズ数を100、 $\Delta t=0.01$ として無次元時間50まで計算を行った。図3に計算結果を示す。誤差量は $10^{-14}$ レベル(マシン0)であり本手法が幾何保存則を完全に満足していることを示している。尚誤差量は式(8)のように定義している。

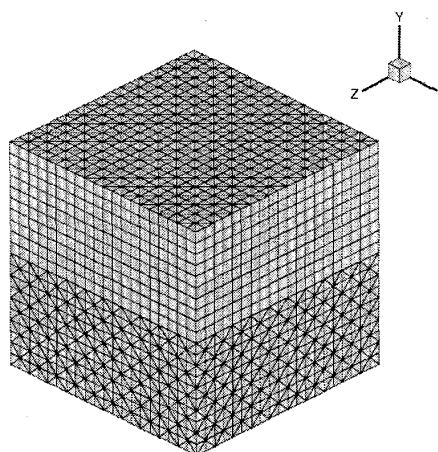


Fig. 2. Computational grid

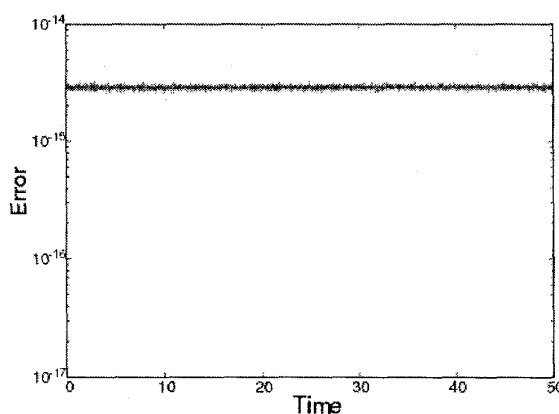


Fig. 3 History of error of density

$$Error = \max \left\{ \left| \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} \right|_i \right\} \quad (8)$$

**3・2 ピストン問題への適用** スキームの検証を終えたので次に実際の流れ場へ本手法を適用した。本節では厳密解の存在する移動境界問題としてピストン問題を取り上げた。図4に示すような直径1、長さ5の円管ピストンを計算領域とする。

静止しているピストンは時刻 $t=0.0$ より等加速度にて移動を開始し $t=2.0$ に速度 $u_p=1.0$ に到達する。その後 $t=5.0$ まで等速にて移動し、最終的にピストン位置 $x=4.0$ まで計算を行うものとする。初期条件には密度 $\rho=1.0$ 、各方向の速度 $u=v=w=0.0$ 、圧力 $p=1/\gamma$ を与える。また境界条件としてピストンの駆動壁に移動壁面条件を、それ以外の壁面には粘着条件を与えている。レイノルズ数は2000である。

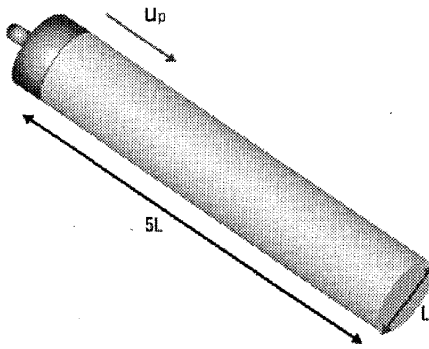
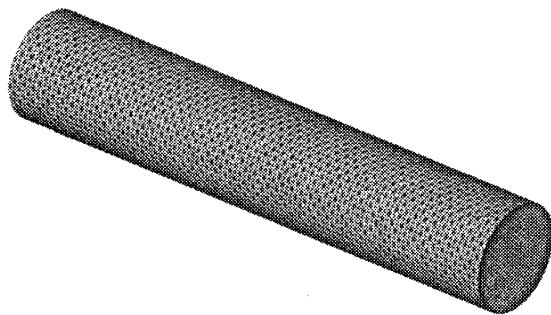
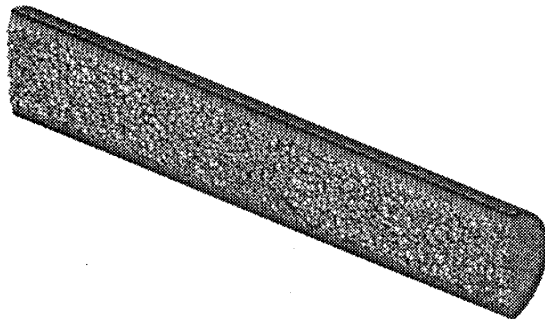


Fig. 4 Piston problem



(a) Outside view



(b) Cut view

Fig. 5 Computational grid

図5に使用した計算格子(全体図と断面図)を示す。円管壁に沿ってプリズム格子を110,000個配置し、円管中心部分にはテトラ格子を147,511個配置している。格子の移動は格子トポロジーを保ったままピストン移動方向にのみ格子全体を収縮させている。

計算結果を以下に示す。図6は各時間における等マッハ線図を示している。ピストンの移動に伴い発生した衝撃波が移動し、壁面にて反射しているのを確認することができる。また反射衝撃波は境界層と干渉し衝撃波の分岐(ラムダ・ショック)を発生さ

せている。また図7には円管中心部における衝撃波位置について、計算解と厳密解との比較を示している。最大誤差量は2%程度であり良好な一致を得られたことから本計算コードについての検証を完了した。

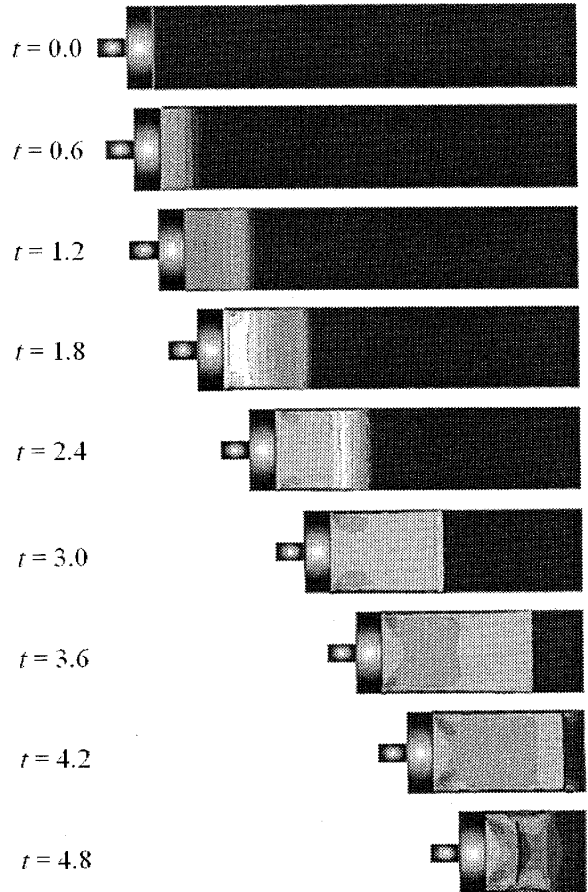


Fig. 6 Mach number contours

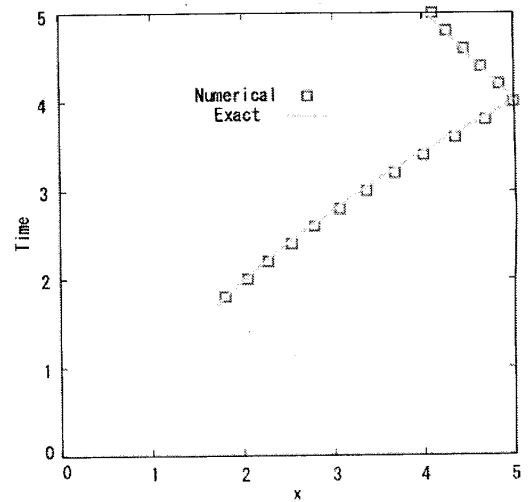


Fig. 7 Comparison of shock positions

#### 4. 振動する翼周りの流れ場への適用

振動する翼周りの流れ場として, Landon<sup>(7)</sup>らにより実験されたピッチング振動する NACA0012 翼周りの流れ場に対し本手法を適用し, 揚力係数および圧力係数について比較を行った.

計算領域は図8に示すように半径を翼のコード長の11倍とした円形とし, スパン方向には0.1倍とった. 計算格子は図9に示すようなハイブリッド型格子とし, テトラ格子を282,201個, プリズム格子を12,480個配置している. プリズム格子の形成には Marching step 法<sup>(8)</sup>を採用し, 最小格子幅は  $2.0 \times 10^{-5}$  とした.

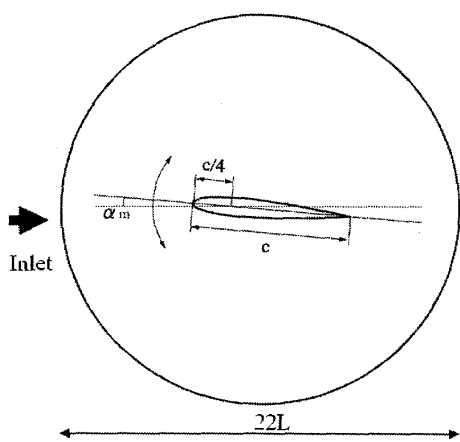


Fig. 8 Calculated region

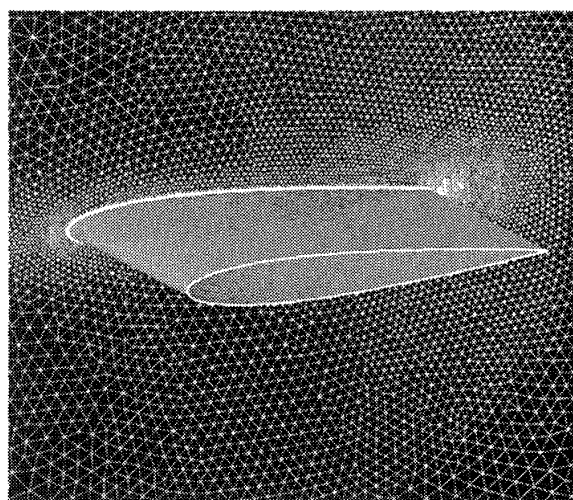
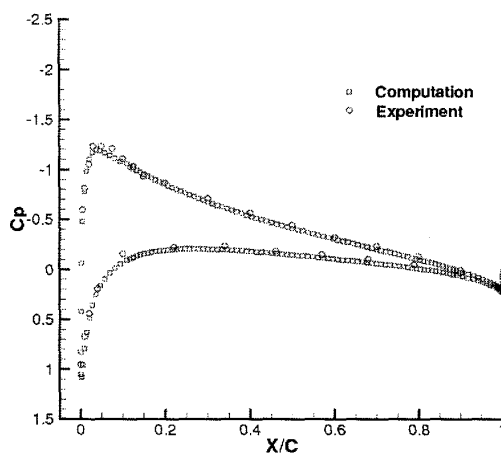


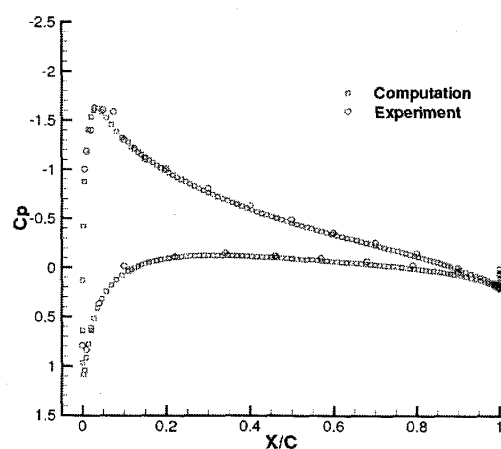
Fig. 9 Computational grid

翼は式(9)により周期運動を行う.

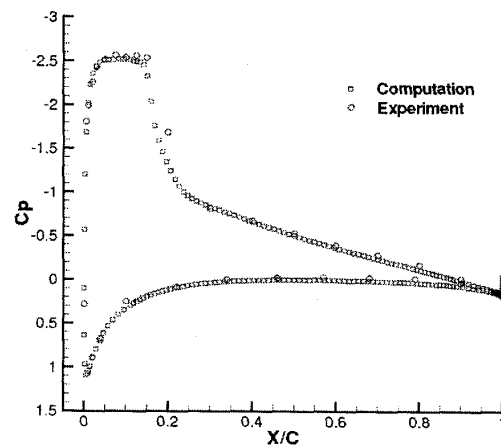
$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\tilde{\omega} t) \quad (9)$$



(a)  $\alpha = 2.67$



(b)  $\alpha = 4.28$



(c)  $\alpha = 6.97$

Fig. 10 Comparison of  $C_p$  distribution

ここで,  $\alpha_m = 4.86$  [deg],  $\alpha_0 = 2.44$  [deg]であり, 無次元振動数  $k = 0.0810$  を用いると角速度  $\tilde{\omega}$  は  $\tilde{\omega} = 2kU_\infty / c$  となる. ここで  $c$  は翼のコード長で

ある。また振動の中心は翼前縁から 1/4 の位置である。翼振動に併せて計算格子全体が移動・変形することになるが、格子の重なりが起らないよう引っ張りバネ系を模擬した移動格子法<sup>9)</sup>を採用した。流入マッハ数は 0.6, レイノルズ数は  $4.8 \times 10^6$  とした。境界条件としてリーマン不変量を与え、スパン方向は周期境界条件とした。時間刻み幅  $\Delta t$  は翼の振動周期  $T$  に対して  $\Delta t = T/800$  とし、無次元時間  $3T$  まで計算を行った。また本計算については 1 次方程式系の乱流モデル<sup>10)</sup>を使用している。

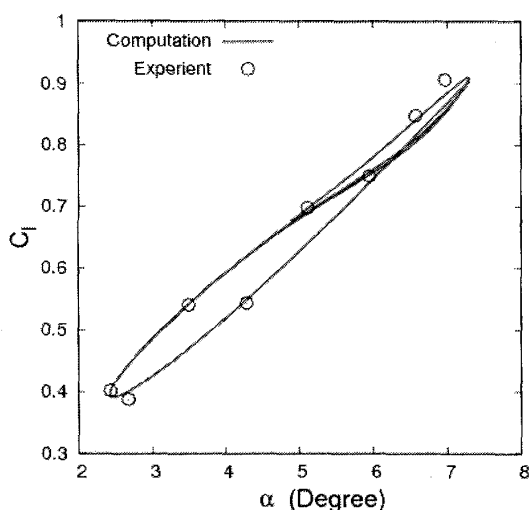


Fig. 11 Comparison of  $C_L$  for attack angle

図 10 は  $\alpha = 2.67, 4.28, 6.97$  における圧力係数分布を、また図 11 は各迎角に対する揚力係数をそれぞれ実験値と比較したものである。大よその誤差量は 2% 程度であり、良好な一致を得ることができた。

## 5. 結 語

翼振動問題に代表される移動変形を伴う粘性非定常問題に対する高精度計算手法として、ハイ

ブリッド型非構造移動格子有限体積法の定式化を行った。幾何保存則の検証、厳密解の存在する流れ場における確認を実施した後、ピッチング運動を行う NACA0012 翼周りの流れ場へ適用し、実験結果と良好な一致を確認したことから、本手法の有効性を示すことができた。

## 文 献

- (1) Thomas P. D., et al, Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grid, *AIAA J.*, Vol. 17, No. 10(1979), pp. 1030-1037.
- (2) Yamakawa M., et al, An Iterative Finite-Volume Method on an Unstructured Moving-Grid (1<sup>st</sup> Report, The Fundamental Formulation and Validation for Unsteady Compressible Flows), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 69, No. 683, B (2003) pp. 1577-1582.
- (3) Roe P. L., Approximate Riemann Solvers Parameter Vectors and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, (1981), pp 357-372.
- (4) Venkatakrishnan V., On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solutions, *AIAA Paper*, 93-0880, (1993).
- (5) Rumsey C. L., et al, Efficiency and Accuracy of Time-Accurate Turbulent Navier-Stokes Computations, *Computers and Fluids*, Vol. 25, (1996), pp. 217-236.
- (6) Jameson, A., et al, Lower-Upper Implicit Scheme with Multiple Grids for the Euler Equations, *AIAA J.*, Vol. 25, (1987), pp. 929-935.
- (7) Landon R. H., Compendium of unsteady aerodynamic measurements: NACA0012. Oscillatory and transient pitching, *AGARD Report*, 702 (1982).
- (8) Pirzadeh S., Three-Dimensional Unstructured Viscous Grids by the Advancing-Layer Method, *AIAA J.*, Vol. 34, No. 1 (1996), pp. 43-49.
- (9) Batina J. T., Unsteady Euler Algorithm with Unstructured Dynamic Mesh for Complex-Aircraft Aerodynamics Analysis, *AIAA J.*, Vol. 29, No. 3 (1991), pp. 327-333.
- (10) Spalart P. R., et al, A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Flows, *AIAA Paper*, 92-0349, (1992).