虚を突く

米谷文男

序

楽は虚より生ず。雅な笛の音は竹筒の空洞から発せられる。

虚に用あり。椀は窪みによって食を保つことができる。

虚に口をつければ嘘となり，虚に戈をもたせて戯れる。嘘も楽しみつつ戯れる。虚の世界は自由だ。遍路で呪文を唱えて施しを受ける雲水。雲は大虚に浮かんで変化自在，空を翔，霰と成り雪となり雨と成って，地に降り注ぎ，葉をつたい苔を潤し土に潜って，清水として湧出し，滝を落ち岩を抉って，ゆったりと大河の流れに身を任して海に出る。魚と戯れ，鯨に飲まれ，撥ねた一滴陽に照らされて，空に昇る。かくのごとく，輪廻の道を，因果の理を口にしつつ辿ってきた。本来無一物，大虚故呪文の経には深い思索の轍があった。一握りの米をお遍路様の頭田袋に入れていた母に身を重ねつつ，この一枝を，馬耳東風と聞き流された轍の跡を辿ってみようと思われる諸氏の錫杖の杖としたい。鈴を鳴らしつつ菜の花畑の道を辿って欲しい。

講義を受けられた諸氏に対する感謝と教育の不十分さに対する懺悔の気持ちから講義録を提示するものである。講義は先人の書，先師先輩同輩後輩の教えから咀嚼準備したものである。講義中も数々の間違いをさらしてきたが，ここにも間違いが残っているであろう。講義中も強調していたように，これも私もそしていかなる権威も信じずに，諸君自身を信じて判断されるよう望んでいる。これが複素数の世界に今一度あるいは新たに興味を持たれる方々への誘いの水になれば幸いである。

ここに図をいれられなかったことが残念である。図を描きながら辿って欲しい。

シラバスでその内容を紹介しておこう。

授業科目名 数理解析

英文授業科目名　Analysis in Mathematical Sciences

単位数・形態　2 単位　講義

年次・学期　２年次　後学期

担当教員　米谷文男

授業の目的・概要

　複素数について馴染み、理解を深め、複素変数の関数の正則性に基づく基本的事項及びそれから導かれる諸公式、応用について述べる。

学習目標

１．本科目のシラバス記載の項目内容に関して、講義時間分予習すること

２．講義時間分復習すること

３．教科書を６割程度は理解すること

４．演習問題を６割程度は解くこと

５．人と議論したり質問しあったりできること。

授業計画項目　内容

1　複素数　　数とは ?，代数演算, 複素数体

2　複素平面　絶対値，偏角，ド・モアブルの定理，オイラーの公式

3　複素関数　有理関数，指数関数，三角関数，対数関数

4　複素平面の位相　複素数列，極限，開集合，連結性，領域

５　複素微分　正則性，コーシー・リーマンの偏微分方程式，等角写像
６　複素線積分　複素平面上の関数の線積分とその性質
７　コーシーの積分定理　正則関数の閉曲線に沿っての線積分
８　コーシーの積分公式　正則関数とその導関数の積分表示
９　積分公式の応用　コーシーの評価，リュウビルの定理，代数学の基本定理
１０　テーラー級数　複素数係数のべき級数による関数の表示
１１　ローラン級数　円環における関数の級数展開，極，真性特異点
１２　留数定理　リーマン面，特異点のまわりでの複素線積分，留数の求め方
１３　留数の応用１　留数による実変数関数の定積分の計算
１４　留数の応用２　偏角の原理，ルーシエの定理

履修条件

「基礎解析 I，II」,「線形代数学 I，II」,「解析学 I，II」 を履修済みであることが望ましい。

受講に当たっての留意事項

この科目に関する９０時間の学習で２単位修得できる。尚，３０時間をこえることのない講議時間内では修得し得ない内容を含むことに注意しておこう。
教科書，講義の 60 ％の理解を最低目標としよう。教科書のどこに何が書いてあるかが俯瞰できるぐらいに教科書を読んで欲しい。演習問題は自分で考えて自分で取り組んで欲しい。友達に解説したり疑問点を説明したりすることも理解を大いに助ける。質問を歓迎する。

教科書／参考書

教科書：基礎課程 複素関数論（占部博信，サイエンス社）
（教科書： 複素関数概説（今吉洋一，サイエンス社））
参考書：関数論講義（柴雅和，森北出版）

成績評価の方法及び基準

試験の結果による。出席，質問，自習時間が反映されるであろう。
担当者の総合判断，１００％独断である。

備考

一般に数学は科学技術の共通言語としての役割を果たしている。この科目がどのように役立つかはしかとは知らぬ。役立てるのは諸君である。
この評価は仮のものである。とらわれないほうがよい。修得した内容にのみ実体がある。

工学系の半期の講義ではこれが精一杯であった。この科目内容は専門学科の２コマの説明の方がよく分かったとの学生の声を耳にしたこともあったが，仕組みの理解を求める姿勢を変えることはできなかった。

数学をして何の役に立つ？	無功徳
数学ってどんなもの？	廓然虚明
目の前にあるものは？	不識
虚仮こけぞうり	めでないてもあしもでない

１９７９．４－２０１０．３　松ヶ崎にて

目 次

第1章　数とは何だろうか？

私達は赤ん坊の時よりひとつ，ふたつ，みっつ，... と指折り数える文化を受け継いでいる。言葉と同じくひどく抽象的なものにもかかわらず馴染みのあるものとなっている。こうした経験から自然数と呼ばれている１，２，３... については何とはなく知っているものとしよう。自然数すべてを数え上げたり書き上げたりすることは一生かかっても決してできないが，そのすべてをとらえる事ができると思い込むことにしよう。自然数全体をシンボルとして Natural number の頭文字を取って $\mathbb{N}$ で表す。自然数には個数を数える時と順番を数える時では少し異なる意味合いがある。ここではそれらに立ち入らずに，自然数を扱う方法として演算のしくみに注目してみよう。

1.1　四則演算

まず，和（加法）について，自然数 m と n に対して m に n を加えた和としてひとつの自然数 ℓ が定まっており，この ℓ は慣例によれば $m+n$ と表されている。その定まり方には次の性質がある。
(1) m に n を加えた和は n に m を加えた和に等しい。この性質は交換法則と呼ばれている。

$$m+n=n+m \quad \text{（交換法則）}$$

順序を異にする事はなにげないことのように思われるが，碁将棋で手順の前後といわれるように結果を大きく変えてしまうことがむしろ普通なのである。ヘルメットを冠ってから頭をなぐられるのと頭をなぐられてからヘルメットを冠るのとを想像してみてください。順序に依らないことは特別な性質であり制限にもなっている。こうして掟・ルールに従う世界に足を踏み入れていくことになる。

さて，３人よれば文殊の知恵と呼ばれるようにもうひとつ加えれば世界は広がる。
(2) 自然数 k をとって $m+n$ に k を加えた和は m に $n+k$ を加えた和に等しい。この性質は結合法則と呼ばれている。

$$(m+n)+k=m+(n+k) \quad \text{（結合法則）}$$

この性質から括弧を省いて書いても混乱しないことになる。

次に，積（乗法）について，自然数 m と n に対して m に n を掛けた積としてひとつの自然数が定まっており，その自然数は慣例によれば $m\times n$ と表されている。その定まり方にも次の性質がある。
(1′) m に n を掛けた積は n に m を掛けた積に等しい。

$$m\times n=n\times m \quad \text{（交換法則）}$$

$(2')$ $m\times n$ に k を掛けた積は m に $n\times k$ を掛けた積に等しい。

$$(m\times n)\times k=m\times(n\times k)\quad\text{（結合法則）}$$

次の和と積両方に関わる性質は，性格を異にするものを結びつけるものでとても重要な役割を担うものである。
(0) m に $n+k$ を掛けた積は $m\times n$ と $m\times k$ の和に等しい。この性質は分配法則と呼ばれている。

$$m\times(n+k)=(m\times n)+(m\times k)\ \text{(分配法則)}$$

このように自然数の和と積が熟知されているとして，ふたつの自然数 m と n が与えられた時，m に何か加えた和が n になるように何かを探せないものだろうか。即，何かを x として $m+x=n$ を満たす x はあるだろうか。自然数 m に自然数を加えた和は m と異なる。従って，$m=n$ の時にはその何かは自然数の中には見いだせない。そこでそのようなものを想定して零と名付け新たに導入することにしよう。それも唯ひとつに限ることにして 0 と表す事にしよう。
(3) $m+0=m$ (零元の存在）
この零に対して $m+x=0$ を満たす x を唯ひとつ想定して $-m$ と表して導入することにしよう。
(4) $m+(-m)=0$ (逆元の存在）
自然数，零，そしてこれらすべての逆元を併せた数の集まりを整数と呼んで $\mathbb{Z}$ で表す。

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-m;m\in\mathbb{N}\}$$

この整数の世界で上記 $(0),(1),(2),(3),(4)$ のルールが成立しているものとしよう。
同様に積について考える。ふたつの自然数 m と n が与えられた時，m に何か掛けた積が n になるように何かを探せないものだろうか。即，何かを x として $m\times x=n$ を満たす x はあるだろうか。今度は，$m\times 1=m$ が成立していることに注意しておく。だが，1 以外の自然数 m に自然数を掛けた積は 1 と異なる。そこで $m\times x=1$ を満たす x を唯ひとつ想定して $\dfrac{1}{m}$ と表して導入し，さらに，自然数 n に対して $n\times\dfrac{1}{m}$ も考えてそれを $\dfrac{n}{m}$ と表して導入することにする。これらの数の集まり

$$\mathbb{Q}_+=\{\frac{n}{m};n,\ m\in\mathbb{N}\}$$

を正の有理数と呼び，$\dfrac{n}{m}\times\dfrac{n'}{m'}=\dfrac{n\times n'}{m\times m'}$ として $(1')$，$(2')$ と
$(3')$ $\dfrac{n}{m}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{n}{m}$ (単位元の存在）
$(4')$ $\dfrac{n}{m}\times\dfrac{m}{n}=1$ (逆元の存在）
のルールが成立しているものとしよう。$(2),(3),(4)$ あるいは $(2'),(3'),(4')$ のような演算ルールが成立しているとき群をなすとか群構造を持つという。そして交換法則を加えて $(1),(2),(3),(4)$ あるいは $(1'),(2'),(3'),(4')$ のような演算ルールが成立しているときは可換群という。一歩話を進めて

$$\mathbb{Q}=\{\frac{n}{m};n,\ m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0\}$$

を考え，

$$\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}=\frac{n\times m'+n'\times m}{m\times m'},\quad \frac{n}{m}\times\frac{n'}{m'}=\frac{n\times n'}{m\times m'}$$

として $(0),(1),(2),(3),(4),(1'),(2'),(3'),(4')$ のルールが成立しているものとし，これを有理数体と呼ぶ。ちなみにある集合で演算が定義され $(0),(1),(2),(3),(4),(2'),(3'),(4')$ のルールが成立しているとき体といい，$(0),(1),(2),(3),(4),(1'),(2'),(3'),(4')$ のとき可換体，$(0),(1),(2),(3),(4),(2'),(3')$ のルールが成立しているとき環，$(0),(1),(2),(3),(4),(1'),(2'),(3')$ のルールが成立しているときとき可換環という。このような数が持つしくみに注目したのはフランスの夭折の天才数学者ガロアである。惜しくも２０歳の時決闘で亡くなっている。決闘前夜の遺書に時間がないと嘆きつつ５次の代数方程式が代数的には解けないことを示した梗概を残した。この群の概念は数学の最も基本的なものとして大きな役割を果たしている。

1.2 有理数再考

有理数体 $\mathbb{Q}$ の元 $\frac{6}{8}$ と $\frac{3}{4}$ は見かけは異なっているが，前者を約分して後者と値が同じとみなされる。異なるものを同じとみなすのは考えを単純化する上で中々に深い意味を持つものである。ここで同値という数学的概念に出会う。有理数 $\frac{n}{m}$ と $\frac{n'}{m'}$ は $n\times m'=n'\times m$ のとき同値といわれる。そしてこのことを $\frac{n}{m}\sim\frac{n'}{m'}$ と表すことにすれば，次の性質があることが分かる (確かめてみよう)。

1) $\frac{n}{m}\sim\frac{n}{m}$ （反射律）

2) $\frac{n}{m}\sim\frac{n'}{m'}$ ならば $\frac{n'}{m'}\sim\frac{n}{m}$ （対称律）

3) $\frac{n}{m}\sim\frac{n'}{m'}$ かつ $\frac{n'}{m'}\sim\frac{n''}{m''}$ ならば $\frac{n}{m}\sim\frac{n''}{m''}$ （推移律）

この反射律，対称律，推移律をあわせて同値律という。さて，$\frac{n}{m}$ に同値な有理数全体からなる集合

$$\{\frac{n}{m}\}=\{\frac{n'}{m'}:\frac{n'}{m'}\sim\frac{n}{m}\}$$

を $\frac{n}{m}$ を代表元とする $\frac{n}{m}$ の同値類という。

命題 **1**

$$\{\frac{n}{m}\}\cap\{\frac{k}{\ell}\}\neq\emptyset \quad ならば \quad \{\frac{n}{m}\}=\{\frac{k}{\ell}\}$$

証明 $\{\frac{n}{m}\}$ に属する任意の有理数 $\frac{b}{a}$ は $\frac{b}{a}\sim\frac{n}{m}$ を満たし，有理数 $\frac{s}{t}\in\{\frac{n}{m}\}\cap\{\frac{k}{\ell}\}$ をとれば，$\frac{s}{t}\sim\frac{n}{m}$，$\frac{s}{t}\sim\frac{k}{\ell}$ が成り立っているから対称律，推移律を用いて $\frac{b}{a}\sim\frac{n}{m}\sim$

$\frac{s}{t} \sim \frac{k}{\ell}$ となり $\frac{b}{a} \sim \frac{k}{\ell}$ だから $\frac{b}{a}$ は $\{\frac{k}{\ell}\}$ に属する事になる。即ち，$\{\frac{n}{m}\} \subset \{\frac{k}{\ell}\}$ で逆の包含関係も同様にして得られるから $\{\frac{n}{m}\} = \{\frac{k}{\ell}\}$ となる。この命題は異なる同値類は共通部分がない事を示しており，全体を重ならないように分けている。このことを類別という。同値類 $\{\frac{n}{m}\}$ をひとつのものとみなして $[\{\frac{n}{m}\}]$ と表すことにする。ここで新ためて，

$$\mathbb{Q} = \{[\{\frac{n}{m}\}]; n,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\} = \{\{\frac{n}{m}\}; n,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}/\sim$$

として，その和，積を

$$[\{\frac{n}{m}\}] + [\{\frac{k}{\ell}\}] = [\{\frac{n \times \ell + k \times m}{m \times \ell}\}],$$

$$[\{\frac{n}{m}\}] \times [\{\frac{k}{\ell}\}] = [\{\frac{n \times k}{m \times \ell}\}]$$

と定義する。この定義はきちんとしたものだろうか。異なる代表元が同じ同値類を表すことがある。そこで $[\{\frac{n}{m}\}] = [\{\frac{n'}{m'}\}],\ [\{\frac{k}{\ell}\}] = [\{\frac{k'}{\ell'}\}]$ のとき，

$$[\{\frac{n \times \ell + k \times m}{m \times \ell}\}] = [\{\frac{n' \times \ell' + k' \times m'}{m' \times \ell'}\}],\ [\{\frac{n \times k}{m \times \ell}\}] = [\{\frac{n' \times k'}{m' \times \ell'}\}]$$

となって同じものを表すことになるか確かめる必要がある。

これを確認することを演習としよう。

成り立つことが確認されてはじめてこの定義がきちんとしたものと言える。このように定義が整合性をもってきちんとしていることを，定義は **well defined** であるという。$[\{\frac{0}{1}\}]$ が零元の，$[\{\frac{1}{1}\}]$ が単位元の役割を果たしていること等 (0), (1), (2), (3), (4), (1′), (2′), (3′), (4′) のルールが成立していることが確かめられる。以上の同値性を意識しながらも，これからは数を素朴に表記して扱っていくことにしよう。

さて，有理数 q を零倍すれば零となることに注意しておこう。実際，零は加えても数を換えることのない唯ひとつの数であるとのルール (1) と分配法則ルール (0) から

$$q \times 0 = q \times (0 + 0) = (q \times 0) + (q \times 0)$$

を得て，$q \times 0 = 0$ でなければならない事が分かる。

さて，ふたつの異なる有理数 $\frac{n}{m}$ と $\frac{k}{\ell}$ に対して $\frac{n}{m} - \frac{k}{\ell} = \frac{n}{m} + (-\frac{k}{\ell}) \in \mathbb{Q}_+$ のとき，$\frac{n}{m}$ が $\frac{k}{\ell}$ より大きいまたは $\frac{k}{\ell}$ は $\frac{n}{m}$ より小さいと約束して，$\frac{n}{m} > \frac{k}{\ell}$ または $\frac{n}{m} < \frac{k}{\ell}$ と表すことにすれば，異なる有理数には必ず大小関係がつくことになる。有理数 q の絶対値 $|q|$ を $q \in \mathbb{Q}_+$ のとき，q，$q = 0$ のとき，0，$q \in \mathbb{Q}_-$ のとき，$-q$，と定義しておこう。

1.3　複素有理数

私達は $(-1) \times (-1) = 1$ と教わってきたがこれはなぜだか考えてみよう。零倍は零，1 倍は同じ数となること，分配法則，交換法則等により，

$$0 = (-1) \times 0 = (-1) \times (1 + (-1)) = ((-1) \times 1) + ((-1) \times (-1))$$

$= (-1) + ((-1) \times (-1))$

また，$0 = (-1) + 1$ だから，上記の法則に従う世界を考える以上 $(-1) \times (-1) = 1$ としなければならない事情が分かる。これで負数と負数の積が正でなければならないことになる。従って，$x \times x = -1$ を満たす有理数 x はない。そこでこのような数 i を想定して導入し虚数単位と呼ぶことにする。そして有理数 $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して $x + iy$ の形で表される数を考えて複素有理数と呼ぶ。

$$\mathbb{Q}_c = \{x + iy : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$$

として $\mathbb{Q}_c$ の２元 $z = x + iy$ と $w = u + iv$ の和を $z + w = (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{Q}_c$ 積を $zw = (x \times u - y \times v) + i(x \times v + y \times u) \in \mathbb{Q}_c$ と定義すれば $\mathbb{Q}_c$ においても $(0), (1), (2), (3), (4), (1'), (2'), (3'), (4')$ のルールが成立していることが確かめられ，可換体となることが分る。

1.4　コーシー列

複素有理数 $z = x + iy$ に対して $x^2 + y^2$ を $|z|^2$ と表す。複素有理数列 $\{z_n\}_{n=1,2...}$ が次の性質を持つ時コーシー列と呼ぶ。どんな自然数 k に対しても条件∗を満たす自然数 $N(k)$ がある。条件∗ : $N(k) \leq n, m$ ならば $|z_m - z_n|^2 < 10^{-2k}$. これを簡便に

$$^\forall k \in \mathbb{N},\ ^\exists N(k) \in \mathbb{N}\ s.t.\ N(k) \leq n, m \Longrightarrow |z_m - z_n|^2 < 10^{-2k}$$

あるいはもっと縮めて $^\exists N(k) \leq n, m \Longrightarrow |z_m - z_n|^2 < 10^{-2k}$ と表すことにする。
さて，正方形の１辺と対角線の長さの比 $\sqrt{2}$ が有理数でないことは知っていますか。かの有名なギリシャのピタゴラスは $\sqrt{2}$ について知っていながら秘匿したという。

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095...$$

直径と円周の長さの比として表される円周率 π も有理数でないことが知られている。

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230...$$

これらの和 $\sqrt{2} + \pi$，積 $\sqrt{2} \times \pi$ を計算できますか。いや，そもそもこの和，積はあるのでしょうか。あるとすれば一体どんな数でしょうか？　疑問が膨らむ。さて，円周率は正多角形を使っていくらでも詳しく近似できることが知られている。そこで，$a_1 = 3,\ a_2 = 3.1,\ a_3 = 3.14,\ a_4 = 3.141,\ a_5 = 3.1415, ...$ と有理数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3...}$ が得られる。これがコーシー列となることは $n \geq k+1$ のとき $a_n - a_{k+1} < 10^{-k}$ だから $N(k) = k+1$ として確かめられる。そしてこのコーシー列がひとつの数 π を定めていると考える。ところで，$b_1 = 3.1,\ b_2 = 3.141,\ b_3 = 3.14159,\ b_4 = 3.1415926,\ b_5 = 3.141592653, ...$ もまたコーシー列となることが確かめられる。このコーシー列も数 π を定めているはずと思う。そこで有理数の場合の考察を思い出して，コーシー列 $\{z_n\}_{n=1,2,3...}$，$\{w_n\}_{n=1,2,3...}$ が $^\exists N(k) \leq n, m \Longrightarrow |z_m - w_n|^2 < 10^{-2k}$ を満たす時同値であると定義し，同値なコーシー列が一つの数を定めると定義しよう。

ここで１０進無限小数で表される数の全体と２進無限小数で表される数の全体は同じものなのだろうか考えてみよう。

1.5 複素数体

コーシー列 $\{z_n\}$ の同値類を $[\{z_n\}]$ で表してひとつの数と見なす。この数を複素数と呼び,

$$\mathbb{C} = \{z = [\{z_n\}] : z_n \in \mathbb{Q}_c,\ \{z_n\} \text{ コーシー列 }\}$$

と表す。そして 2 つの複素数 $z = [\{z_n\}]$ と $w = [\{w_n\}]$ の和を $z + w = [\{z_n + w_n\}]$, 積を $zw = [\{z_n w_n\}]$ で定義する。$\{z_n + w_n\}$, $\{z_n w_n\}$ がコーシー列となることそしてこれらの定義は代表元のとり方によらず well defined であることが確かめられる。$0 = [\{0 + i0\}]$ が零元の, $1 = [\{1 + i0\}]$ が単位元の役割を果たしていること等 $(0), (1), (2), (3), (4), (1'), (2'), (3'), (4')$ のルールが成立していることも確かめられる。$\mathbb{C}$ は可換体となって複素数体と呼ばれる。複素数 $z = [\{z_n\}]$ $(z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{Q}_c)$ に対して,

$$|z_n - z_m|^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 \geq (x_n - x_m)^2,\ |z_n - z_m|^2 \geq (y_n - y_m)^2$$

に注意すれば $\{z_n\}$ がコーシー列となるとき $\{x_n + i0\}$, $\{y_n + i0\}$, $\{0 + iy_n\}$ もコーシー列となり, これらが定める数を $x,\ y,\ iy$ で表せば $z = x + iy$ となる。x を z の実部 y を z の虚部という。$\mathbb{C}$ の部分集合 $\mathbb{R} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$ の元を実数といい, $\mathbb{R}$ 自体 $\mathbb{C}$ におけると同じ演算で $(0), (1), (2), (3), (4), (1'), (2'), (3'), (4')$ のルールが成立していることは明らかでこれを実数体という。0 と異なる実数 $x = [\{x_n\}]$ が $x_n \in \mathbb{Q}_+$ で定義されているとき正の実数といい $x > 0, (0 < x)$ で示す。実数 x_1, x_2 が $x_2 - x_1 > 0$ を満たすとき x_2 は x_1 より大きいとか x_1 は x_2 より小さいといって $x_2 > x_1, (x_1 < x_2)$ で示す。こうして実数 $\mathbb{R}$ には大小関係があることになる。即ち, 任意の 2 実数 x, y に対して 関係 $x < y,\ x = y,\ x > y$ の内唯ひとつが必ず成り立っている。

1.6 2 乗根

正の有理数 $q \in \mathbb{Q}_+$ に対して 2 乗すれば q となる数はあるのだろうか。2 乗すれば q より大きくなる正の有理数 x_1 をひとつとり漸化式 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{q}{x_n}),\ n = 1, 2, ...$ によって有理数列 $\{x_n\}$ を作る。これはコーシー列となって一つの実数 $\sqrt{q}$ を定めて求める数となる事が分る。実際,

$$x_{n+1}^2 = q + \frac{1}{4}(x_n - \frac{q}{x_n})^2,\ x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - q}{2x_n}$$

だから x_n^2 は q より大きく単調減少である。また,

$$\frac{x_{n+1} - x_{n+2}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{(x_{n+1}^2 - q)x_n}{(x_n^2 - q)x_{n+1}} = \frac{x_n^2 - q}{2(x_n^2 + q)} < \frac{1}{2},$$

によって,

$$0 < x_n^2 - q = 2x_n(x_n - x_{n+1}) < 2x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_1 - x_2)$$

を得る。これは $\{x_n^2\}$ と $\{q\}$ が同値なコーシー列であることを示し，$[\{x_n^2\}]=q$ となる。一方 $n<m$ として，

$$0<x_n-x_m=\sum_{\ell=n}^{m-1}(x_\ell-x_{\ell+1})\le\sum_{\ell=n}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}(x_1-x_2)\le(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

から $\{x_n\}$ がコーシー列となることが分かる。 $[\{x_n\}]=\sqrt{q}$ と書けば，

$$(\sqrt{q})^2=[\{x_n\}][\{x_n\}]=[\{x_n^2\}]=q$$

次に正の実数 a に対してこれを定めるコーシー列である正の有理数列 $\{q_n\}$ をとる。

$$k<^{\exists}N(k)\le n,m\Longrightarrow|q_m-q_n|^2<10^{-2k}$$

そこで上記のように $\sqrt{q_n}$ を定めるコーシー列 $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ をとる。上でみたように，次が言える。

$$n<^{\exists}N_n\le i\Longrightarrow 0<x_{n,i}^2-q_n<10^{-n}\quad(n<m \text{ なら } N_n<N_m \text{ としてよい。})$$

これから正の有理数列 $\{x_{n,N_n}\}$ を作れば，$N(k)\le n,m$ に対して，

$$|x_{n,N_n}^2-x_{m,N_m}^2|\le|x_{n,N_n}^2-q_n|+|x_{m,N_m}^2-q_m|+|q_n-q_m|$$

$$<10^{-n}+10^{-m}+10^{-k}<3\times10^{-k}<10^{-(k-1)}$$

となって， $\{x_{n,N_n}^2\}$ は a を定めるコーシー列である。 更に，$\{x_{n,N_n}\}$ もコーシー列となって，これが定める実数を $\sqrt{a}$ で表せば $(\sqrt{a})^2=a$ となる。

1.7 絶対値

複素数 $z=x+iy$ に対して $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ が定義できて z の絶対値と呼ぶ。$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ に対して，

$$|z_1|^2|z_2|^2-(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1y_2-y_1x_2)^2\ge0$$

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2(x_1x_2+y_1y_2)\\&\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

となることから，

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

が成り立つことが分かる。これを三角不等式という。

1.8 完備性

新ためて複素数列 $\{z_n\}$ がコーシー列であることを，

$$^{\forall}k \in \mathbb{N},\ ^{\exists}N(k) \in \mathbb{N}\ s.t.\ N(k) \leq n, m \Longrightarrow |z_m - z_n| < 10^{-k}$$

と定義する。また，複素数列 $\{z_n\}$ が $z \in \mathbb{C}$ に収束することを，

$$^{\forall}k \in \mathbb{N},\ ^{\exists}N(k) \in \mathbb{N}\ s.t.\ N(k) \leq n \Longrightarrow |z_m - z| < 10^{-k}$$

と定義し，これを $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ と表す。複素数 z を定めるコーシー列である複素有理数列 $\{z_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となる。実際，

$$^{\forall}k \in \mathbb{N},\ ^{\exists}N(k) \in \mathbb{N}\ s.t.\ N(k) \leq n, m \Longrightarrow |z_n - z_m| < 10^{-k}$$

から n を固定して数列 $\{|z_n - z_m|\}_m$ を考えれば，

$$||z_n - z_m| - |z_n - z_\ell|| \leq |z_\ell - z_m| < 10^{-k}\ (N(k) \leq \ell)$$

から コーシー列 $\{|z_n - z_m|^2\}$ の定める実数 $|z_n - z|^2$ は 10^{-2k} 以下である。これは $\{z_n\}$ が $z \in \mathbb{C}$ に収束することを示している。任意のコーシー列 $\{z_n\}$ に対して z_n を定めるコーシー列である複素有理数列 $\{z_{n,\ell}\}_\ell$ をとる。このとき，

$$^{\exists}N(k) \leq n, m \Longrightarrow |z_m - z_n| < 10^{-k}$$

$$n <^{\exists} N_n \leq \ell \Longrightarrow |z_{n,\ell} - z_n| < 10^{-n}\ (n < m \Longrightarrow N_n < N_m \text{ としてよい })$$

$$|z_{m,N_m} - z_{n,N_n}| \leq |z_{m,N_m} - z_m| + |z_m - z_n| + |z_n - z_{n,N_n}| < 3 \times 10^{-k}$$

従って，$\{z_{n,N_n}\}$ はコーシー列となってこれが定める複素数を z とすれば，

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{n,N_n}| + |z_{n,N_n} - z| \leq 10^{-n} + |z_{n,N_n} - z|$$

によって $\{z_n\}$ が z に収束することが分る。以上により任意の複素数のコーシー列はかならず一つの複素数に収束することになる。この性質を複素数体の完備性といいあるいは $\mathbb{C}$ は完備であるという。

これまでの数についての考察を整理すれば，複素数には四則演算が定義されて $(0), (1), (2), (3), (4), (1'), (2'), (3'), (4')$ のルールが成立しておりコーシー列の収束先も複素数の範囲内にある。即ち，複素数は完備な体であるとまとめることができる。

1.9 e^z

複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ として複素数列 $\{E_n(z)\}$ を作ればこれはコーシー列となる。実際，$|z| < n < m$ に対して，

$$|E_m(z) - E_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{z}{n} \right|^{k-n-1} \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - |\frac{z}{n}|}$$

の評価を得る。今 $10|z|$ より大きい自然数 ℓ そして $\frac{|z|^\ell}{\ell!}$ より 10^s が大きくなるような自然数 s をとって，自然数 k に対して $N(k)=k+\ell+s$ と置く。$|z|<N(k)\le n<m$ に対して，

$$|E_m(z)-E_n(z)| =\le \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-|\frac{z}{n}|} \le \left|\frac{z}{\ell}\right|^{n-\ell+1}\frac{|z|^\ell}{\ell!}\frac{1}{1-|\frac{z}{\ell}|} < 10^{-(n-\ell+1)}10^s 10 < 10^{-k}$$

となって $\{E_n(z)\}$ はコーシー列となる。 $\{E_n(z)\}$ が収束する複素数を e^z または $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ で表す：

$$e^z = \lim_{n\to\infty} E_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+z+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$$

$$e^0=1,\ e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e,$$

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240...$$

この e は自然対数の底とよばれ無理数であることが知られている。

1.10 指数法則

複素数 $z,\ t\in\mathbb{C}$ に対して $e^z e^t = e^{z+t}$ が成立する。これを指数法則という。積が和に転換されこの効用は大きい。これを確かめる為に，２項定理を用いて，

$$\begin{aligned}
E_n(z)E_n(t) &= \sum_{\ell=0}^{n}\frac{z^\ell}{\ell!}\sum_{s=0}^{n}\frac{z^s}{s!} = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{\ell+s=k}\frac{z^\ell t^s}{\ell!s!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!z^\ell t^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=k-n}^{n}\frac{k!z^\ell t^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(z+t)^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k!}(\sum_{\ell=k-n}^{n}{}_kC_\ell z^\ell t^{k-\ell})
\end{aligned}$$

そこで，

$$\begin{aligned}
|E_n(z)E_n(t)-E_n(z+t)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=k-n}^{n}{}_kC_\ell z^\ell t^{k-\ell}\right| \le \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=k-n}^{n}{}_kC_\ell |z|^\ell |t|^{k-\ell} \\
&\le \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(|z|+|t|)^k}{k!} \le e^{|z|+|t|} - E_n(|z|+|t|)
\end{aligned}$$

により，

$$e^{z+t} = \lim_{n\to\infty}E_n(z+t) = \lim_{n\to\infty}E_n(z)E_n(t) = \lim_{n\to\infty}E_n(z)\lim_{n\to\infty}E_n(t) = e^z e^t$$

を得る。

1.11 $\cos z,\ \sin z$

複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対してその余弦，正弦を，

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

と定義する。複素数 $z,\ t \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\cos z \cos t - \sin z \sin t = \frac{1}{4}\{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{it} + e^{-it}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{it} - e^{-it})\}$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{iz}e^{it} + e^{-iz}e^{-it}\} = \frac{1}{2}\{e^{i(z+t)} + e^{-i(z+t)}\} = \cos(z+t)$$

$$\sin z \cos t + \cos z \sin t = \frac{1}{4i}\{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{it} + e^{-it}) + (e^{iz} + e^{-iz})(e^{it} - e^{-it})\}$$

$$= \frac{1}{2i}\{e^{iz}e^{it} - e^{-iz}e^{-it}\} = \frac{1}{2i}\{e^{i(z+t)} - e^{-i(z+t)}\} = \sin(z+t)$$

となって加法公式が得られる。余弦の加法公式で $t = -z$ とすれば，

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = \cos 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1$$

1.12 オイラーの公式

定義式より，

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}$$

特に，実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

前者は歴史的には三角函数が知られている所から出発してオイラーにより発見されたものでオイラーの公式として，後者はド・モアブルの定理として知られている。

ここで $\cos\theta = x,\ \sin\theta = y$ とおけば，$x^2+y^2=1$ となり xy 平面上で (x,y) は単位円周上の点となっている。こうして実数 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ に対して $A = (\cos\alpha, \sin\alpha),\ B = (\cos\beta, \sin\beta),\ C = (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)),\ I = (1,0)$ はすべて単位円周上の点である。加法公式を考慮すれば円弧 IA を単位円周上反時計回りに回転して I を B に重ねたとき A が位置する点が C となっている。$E = (\cos 1, \sin 1)$ として円弧 IE を単位円周上反時計回りに回転して I を E に重ねたとき E が位置する点が $(\cos 2, \sin 2)$ となっている。このように円弧 IE を n 回回転して得られる点が $(\cos n, \sin n)$ となっている。 $P_m = (\cos\frac{1}{m}, \sin\frac{1}{m})$ は円弧 IP_m を m 回回転すれば E となる点である。円弧 IP_m を n 回回転して得られる点が $(\cos\dfrac{n}{m}, \sin\dfrac{n}{m})$ となっている。有理数に対応する点が単位円周上に稠密にあり，実数に対応する点をすべてとれば完備性から単位円周をすべて埋め尽くすことになる。ここで $(\cos\theta, \sin\theta) = (-1,0)$ を満たす最小の正数を $\theta = \pi$ と表す。 この π が円周率そのものである！。 このとき，$(\cos\pi, \sin\pi) = (-1,0),\ (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1,0)$ 即ち $e^{\pi i} = -1,\ e^{2\pi i} = 1$ である。そして任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $e^{2n\pi i} = 1$ となる。

第2章　複素数の幾何学的表示

物は異なる方向から見ればまた違って見える。光のあて方に依っては鮮やかな面を見せてくれもする。平面は平面であるのには違いないが，なんと彩り豊かになることだろう。地には山有り谷有り川も湖もリアス式海岸のように複雑な地形もある。素直に眺めて，まずは，単純な領域に住んで風に吹かれてみよう。

2.1　複素平面

複素数 $e^{i\theta}$ を xy 平面上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ に対応させた。これを敷衍して複素数 $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ を xy 平面上の点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対応させる。ここで，$r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ とおいて，$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$ に注意して，直交座標で表された xy 平面の (x, y) に当たる点が複素数 $x + iy$ を表すと考え xy 平面を新装して複素数平面と名付ける。複素数平面はこの構想者とみられるガウスに因んでガウス平面あるいは簡単に複素平面と呼ばれている。xy 平面の x 軸，y 軸にあたるところを複素平面では実軸，虚軸という。

2.2　絶対値と偏角

零と異なる複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を r とおけば，$r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ 即ち $z = re^{i\theta}$ を満たす実数 θ が無限個ある。これらの θ を z の偏角という。 z の偏角の全体を，

$$Arg\ z = \{\theta : \theta \in \mathbb{R},\ z = |z|e^{i\theta}\}$$

で表し，特に， z の偏角で値が 0 以上で 2π 未満のものを偏角 z の主値とよび $arg\ z$ で表す。 $e^{2n\pi i} = 1$ により $Arg\ z = \{arg\ z + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ と表すことができる。複素数 z を $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表すときこれを z の極形式または極表示という。

注　z の絶対値は原点 0 と z の距離を表す。z の偏角は実軸と線分 $0z$ のなす角を実軸から反時計回りを正として計ったものをラジアンを単位とする数値で表したもので 0 の回りを何回か回ったものも考慮している。ここで，単位円周上の弧で見込まれる角をその弧の長さで表したものがラジアンを単位とする角の値である。弧度法における 360° が 2π ラジアンで $(15n)^\circ$ が $\dfrac{n}{12}\pi$ ラジアンである。

2.3　演算の幾何学的意味

複素平面で複素数の演算を見直してみれば，複素数 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2e^{i\theta_2}$ の和は $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ でベクトル $\overrightarrow{0z_1} = (x_1, y_1)$ と

ベクトル $\overrightarrow{0z_2}=(x_2,y_2)$ のベクトル和 (x_1+x_2,y_1+y_2) にあたる点に z_1+z_2 が対応しており，積は $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ でベクトル $\overrightarrow{0z_1}$ を $|z_2|$ スカラー倍して z_2 の偏角だけ回転するという幾何学的な意味合いを持っている事が分る。ここで，

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,$$

$$\begin{aligned}Arg\ (z_1z_2)&=\{\theta_1+\theta_2+2n\pi:n\in\mathbb{Z}\}=\{\theta_1+2n\pi+\theta_2+2m\pi:n,\ m\in\mathbb{Z}\}\\&=Arg\ z_1+Arg\ z_2\end{aligned}$$

ただし，$Arg\ z^2=\{arg\ z^2+2n\pi:n\in\mathbb{Z}\}\neq\{2(arg\ z+2n\pi):n\in\mathbb{Z}\}=2Arg\ z$ に注意しておこう。偏角の主値を考えれば, $arg\ z_1+arg\ z_2$ が 2π 以上になることもあるので $arg\ (z_1z_2)=arg\ z_1+arg\ z_2$ とはいえないが，これを，

$$arg\ (z_1z_2)\equiv arg\ z_1+arg\ z_2\ (mod\ 2\pi)$$

と表して左辺と右辺の差が 2π の整数倍となっていることを示す。

複素数 $z=x+iy$ に対して $\bar{z}=x-iy$ を z の共役複素数といい複素平面では z の実軸に対する対称点が $\bar{z}$ になっている。

$$z+\bar{z}=2x,\ z-\bar{z}=2iy,\ z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2,\ \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}\ (z\neq 0)$$

がいえる。複素数 $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$ に対して，

$$\overline{(z_1+z_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

$$\overline{(z_1z_2)}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

$$\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-i(y_1x_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

が成り立っている。

2.4　コーシーの不等式

絶対値に関しては三角不等式

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|,\ ||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|$$

が成り立っており，これを反復適用して，

$$|\sum_{k=1}^{n}z_k|=|z_1+z_2+z_3+...+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+|z_3|+...+|z_n|=\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

を得る。

次のコーシーの不等式がいえる。

$$|\sum_{k=1}^{n}z_kw_k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2}$$

任意の複素数 λ に対して,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - \lambda\overline{w_k}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\bar{\lambda} z_k w_k + \lambda \overline{z_k w_k}) + |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |\overline{w_k}|^2$$

$\sum_{k=1}^{n} |\overline{w_k}|^2 = 0$ のとき，すべての $w_k = 0$ だから，コーシーの不等式の両辺は共に 0 となって，不等式が成立している。$\sum_{k=1}^{n} |\overline{w_k}|^2 \neq 0$ のとき，$\lambda = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} z_k w_k}{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2}$ と置けば,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \frac{|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k|^2}{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2} \text{ そして } \quad |\sum_{k=1}^{n} z_k w_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$$

を得てコーシーの不等式が成立している。

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$$

も成立している。

2.5 直線と円の方程式

複素平面上で幾何図形を考えてみよう。点 z_0 を通って実軸となす角が θ の直線 ℓ 上の点 z に対して，z_0 だけ平行移動して時計まわりに θ 回転すれば実数となるから，$e^{-i\theta}(z - z_0) = \overline{e^{-i\theta}(z - z_0)}$ となり，$re^{i\theta} = A$ とおいて $\bar{A}z - A\bar{z} - \bar{A}z_0 + A\overline{z_0} = 0$ を得る。逆にこの方程式を満たす z は直線 ℓ 上にあることが分るから，これが直線の方程式を表している。

$$\ell = \{z : \bar{A}z - A\bar{z} - \bar{A}z_0 + A\overline{z_0} = 0\}$$

次に，点 z_0 を中心として半径 R の円 C 上の点 z に対して $|z - z_0| = R$ が成り立つから円の方程式は $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 - R^2 = 0$ となる。

$$C = \{z : z\bar{z} - z_0\bar{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 - R^2 = 0\}$$

2.6 集合

既に使ってきた記号もあるが，ここで集合について整理しておこう。集合は考えている対象のある集りで，考えている対象がその集合に属するか属しないかがはっきりしているものをいう。集合を A で表せば，対象 a が A に属するとき，$a \in A$ または，$A \ni a$ と表し，a を A の元または要素という。対象 b が A に属しないとき，$b \notin A$ または，$A \not\ni b$ と表す。要素を一つも持たない集合を想定し，それを空集合と呼び，ϕ で表す。集合 A のどの要素も集合 B の要素となっているとき，$A \subset B$ または，$B \supset A$ と表し，A を B の部分集合という。$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき A と B は同じ集合となり $A = B$ と表せる。空集合はすべての集合に対してその部分集合と考える。集合 Ω の要素以外は考えの対象としない場合，Ω を全空間と呼ぶ。

そして，Ω の部分集合 A に対して，A に属しない Ω の要素全体からなる Ω の部分集合を A の補集合と呼び，A^c で表す。$(A^c)^c = A^c$ となっている。命題 P は真偽のはっきりした主張を表し，考えの対象となる x を含む命題 $P(x)$ は対象 x を指定する毎に真偽のはっきりした主張となるものとする。 $x \in A$ はこの 1 例である。$P(x)$ が眞となる x すべてからなる集合を $\{x; P(x)\}$ のように表す。集合 A と B に対して， A または B に属する要素すべてからなる集合を A と B の和集合と呼び，$A \cup B$ と表し，A にも B にも属する要素すべてからなる集合を A と B の共通集合と呼び， $A \cap B$ と表す。もっと一般に，集合 Λ の各要素 λ でラベル化された集合 A_λ に対して，どれかの A_λ に属する要素すべてからなる集合を $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と表し，すべての A_λ に属する要素すべてからなる集合を $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と表す。

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ または } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ かつ } x \in B\} (\text{ かつは省略して } = \{x; x \in A, x \in B\})$$

集合も演算できて次の性質を持つ。

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A \ (\text{交換法則})$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \ (\text{結合法則})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \ (\text{分配法則})$$

$$A \cup \cap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \cap_{\lambda\in\Lambda}(A \cup B_\lambda),\ A \cap \cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \cup_{\lambda\in\Lambda}(A \cap B_\lambda)$$

確かめてみよう。結合法則によって　(　) は次のように省略してもよくなる。

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C,\ (A\cap B)\cap C = A\cup(B\cap C) = A\cap B\cap C$$

さて， $\Lambda = \{\lambda; \lambda \in \mathbb{N}, 1 \le \lambda \le 3\}$ の場合 $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \cup_{i=1}^3 A_i$ のように書ける。同様に，$\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \cup_{i=1}^\infty A_i$ と書ける。ここで，次の定理を示しておこう。

ド・モルガンの定理

$$(\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c,\quad (\cap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)^c = \cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c$$

まず，任意の $\mu \in \Lambda$ に対して，$A_\mu \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より，$A_\mu^c \supset (\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c$ を得て，$\cap_{\mu\in\Lambda} A_\mu^c \supset (\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c$ が分る。逆に，任意の $x \in \cap_{\mu\in\Lambda} A_\mu^c$ に対し，どんな $\lambda \in \Lambda$ にも $x \notin A_\lambda$ で $x \notin \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ である。即ち，$x \in (\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c$ となり，$\cap_{\mu\in\Lambda} A_\mu^c \subset (\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c$ が分り結論 $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = (\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c$ を得る。これを用いて，

$$\cap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \cap_{\lambda\in\Lambda} (B_\lambda^c)^c = (\cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c)^c \text{ を得て,} (\cap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)^c = \cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c \text{ が分る。}$$

2.7　複素平面 $\mathbb{C}$ の位相

複素数 z_0 と正数 r に対して集合 $\{z : |z - z_0| < r\}$ を z_0 を中心とする半径 r の開円盤といい $V_r(z_0)$ で表す。 z_0 を中心とするある半径の開円盤を含む集合を z_0 の近傍という。複素平面内の部分集合 U が開集合であることを，U の任意の点 z_1 に

対して U に含まれる開円盤 $V_r(z_1)=\{z:|z-z_1|<r\}$ があることと定義する。開集合の全体

$$\mathbf{O}=\{U;U\subset\mathbb{C},\ U \text{ は開集合 }\}$$

を開集合族とよぶ。複素平面 $\mathbb{C}$ および空集合 $\emptyset$ は開集合であり，

$$U_i\in\mathbf{O}\ i=1,...n \text{ ならば }\quad \cap_{i=1}^n U_i\in\mathbf{O},$$

そして，任意の添数集合 Λ に対して，

$$U_\lambda\in\mathbf{O},\ \lambda\in\Lambda \text{ ならば }\quad \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\in\mathbf{O},$$

$$(\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=\{z:z\in U_\lambda \text{ となる } \lambda\in\Lambda \text{ がある。}\})$$

が成り立っている。実際，$z_1\in\cap_{i=1}^n U_i$ に対して，$V_{r_i}(z_1)\subset U_i$ をとって $\{r_i\}_{i=1}^n$ の中の最小の数を r とすれば $V_r(z_1)\subset\cap_{i=1}^n U_i$，そして，$z_1\in\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ に対して，z_1 が含まれている U_{λ_1} があり $V_r(z_1)\subset U_{\lambda_1}\subset\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ となる円盤がとれる。複素平面内の部分集合 F が閉集合であることを F の補集合 $F^c=\mathbb{C}-F$ が開集合となることと定義する。閉集合の全体

$$\mathbf{F}=\{F;F\subset\mathbb{C},\ F \text{ は閉集合 }\}$$

を閉集合族とよぶ。複素平面 $\mathbb{C}=\emptyset^c$ および空集合 $\emptyset=\mathbb{C}^c$ は閉集合であり，

$$F_i\in\mathbf{F}\ i=1,...n \text{ ならば }\quad \cup_{i=1}^n F_i\in\mathbf{F}$$

そして，任意の添数集合 Λ に対して，

$$F_\lambda\in\mathbf{F},\ \lambda\in\Lambda \text{ ならば }\quad \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\in\mathbf{F},$$

$$(\cap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda=\{z:\text{すべての } \lambda\in\Lambda \text{ に対して } z\in F_\lambda\})$$

が成り立っている。 実際，集合演算でド・モルガンの定理を用いて，

$$(\cup_{i=1}^n F_i)^c=\cap_{i=1}^n(F_i)^c\in\mathbf{O},\ (\cap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda)^c=\cup_{\lambda\in\Lambda}(F_\lambda)^c\in\mathbf{O}$$

に注意すればよい。複素平面内の部分集合 S に対して S に含まれる開集合全体の和集合即ち最大の開集合

$$S^\circ=\cup\{U_\lambda\in\mathbf{O}:U_\lambda\subset S\}$$

を S の内部といい S° に属する点を S の内点という。また，S を含む閉集合全体の積集合即ち最小の閉集合

$$\bar{S}=\cap\{F_\lambda\in\mathbf{F}:F_\lambda\supset S\}$$

を S の閉包といい $(\bar{S})^\circ$ に属する点を S の外点という。S の境界を $\partial S=\bar{S}-S^\circ$ としてこれに属する点を S の境界点という。 S が連結であることを，互いに交わらない開集合 $U_1,\ U_2$ の和集合が S を含むときは $U_1\cap S$ または $U_2\cap S$ のどちらかが必ず空集合となることと定義する。複素平面内の部分集合 G が開集合であって連結であるとき領域という。

第3章　複素函数

野に咲く花は色とりどりに美しい。その野にあった花が咲き，生える植物相がその野を表しもする。函数も個性豊かに種々有り，領域に応じて千変万化する。

3.1　複素函数

複素平面上の集合 G_1 の各点 z ごとに複素平面上の集合 G_2 の 1 点 w が対応しているときこれを $w = f(z)$ で表して, G_1 から G_2 への写像 f あるいは G 上の函数 f といい， G を f の定義域, $\{f(z); z \in G\}$ を f の値域という。 G_1 の異なる点が G_2 の異なる点に対応するとき，f は 1 対 1 であるまたは単射であるという。G_2 のどの点にも対応する G_1 の点があるとき，f は上への写像または全射であるという。

例　複素数 z_0 をとって，$\mathbb{C}$ の点 z に $\mathbb{C}$ の点 $z + z_0$ を対応させれば，$w = f(z) = z + z_0$ は $\mathbb{C}$ 上の函数となり $\mathbb{C}$ の平行移動を表している。また，$z_0 z$ を対応させれば，$w = g(z) = z_0 z$ は $\mathbb{C}$ の回転拡大（縮小）を表す $\mathbb{C}$ 上の函数となる。そして，$\dfrac{1}{z}$ を対応させれば，$w = h(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ 上の函数で反転 ($\dfrac{1}{\bar{z}}$ に対して使われることが多い）と呼ばれている。

ここで z-平面上の円周 C が h によって w-平面上のどんな図形に移るか考えてみよう。円周 C の方程式 $|z - z_0| = R$ として $z = \dfrac{1}{w}$ を代入すれば $|1 - z_0 w| = R|w|$ より $(|z_0|^2 - R^2)w\bar{w} - z_0 w - \overline{z_0 w} + 1 = 0$ を得る。$|z_0|^2 = R^2$ で円周 C が 0 を通るとき $z_0 w + \overline{z_0 w} + 1 = 0$ となりこれは直線を表す。$|z_0|^2 \neq R^2$ のとき $\dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2} = w_0$ と置けば，$w\bar{w} - \overline{w_0} w - w_0 \bar{w} + \dfrac{1}{|z_0|^2 - R^2} = 0$ 即ち $|w - w_0| = \dfrac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$ となりこれは円周を表す。直線も（半径無限大の）円とみなせば反転は円周を円周に写像するといえる。

3.2　合成函数

複素平面上の集合 G_1 から G_2 への函数 f と G_2 から G_3 への函数 g があるとき，G_1 の点 z に G_3 の点 $g(f(z))$ を対応させて G_1 から G_3 への函数を得る。これを $g \circ f$ で表して f と g の合成函数という。

例　$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への函数 $f(z) = z + z_0$ と $g(z) = z_1 z$ の合成函数 $g \circ f$ は $g \circ f(z) = g(z + z_0) = z_1(z + z_0) = z_1 z + z_1 z_0$, $f \circ g$ は $f \circ g(z) = f(z_1 z) = z_1 z + z_0$ となってこの両者は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への異なる函数になっている。

函数 $w = h(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ は $c = 0$ のとき 1 次式となり $\mathbb{C}$ 上の函数で $c \neq 0$ のと

き１次分数式，１次分数変換，メビウス変換等と呼ばれ $\mathbb{C}-\{\frac{-d}{c}\}$ 上の函数となっている。これは

$$\zeta=f(z)=cz+d,\ \xi=g(\zeta)=\frac{1}{\zeta},\ \eta=h(\xi)=\frac{(bc-ad)\xi}{c},\ w=j(\eta)=\eta+\frac{a}{c}$$

の合成函数 $j\circ h\circ g\circ f$ として表される。それぞれの写像 $f,\ g,\ h,\ j$ が円周を円周に写像することに注意すれば，１次分数変換は円周を円周に写像する　といえる。

三角函数 $w=\sin\ z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$ は

$$\zeta=f(z)=iz,\ \xi=g(\zeta)=e^{\zeta},\ \eta=h(\xi)=-i\xi,\ w=j(\eta)=\frac{1}{2}(\eta+\frac{1}{\eta})$$

の合成函数 $j\circ h\circ g\circ f$ として表される。

$w=z^n$ は $\mathbb{C}$ 上の函数でありその一次結合 $w=f(z)=\sum_{k=1}^n a_kz^k$ は $a_n\neq 0$ のとき n 次多項式といわれる。m 次多項式 $g(z)$ に対して商を考えれば，$h(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$ は有理式あるいは有理函数といわれ $f(z)=0$ となる点を除いた $\mathbb{C}$ 上の函数となっている。

領域 G 上の函数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ に対して G 内の各点 z で $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ がコーシー列となっていれば，$\lim_{n\to\infty}f_n(z)$ は収束しその極限値を $f(z)$ と定義すればこれは G 上の函数となる。

3.3 冪級数

複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$，複素数 z_0，複素変数 z によって，形式的に $\sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k$ と表したものを冪級数という。$f_n(z)=\sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k$ として $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ がコーシー列となる z で $f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ が定義されこの冪級数は収束するという。$\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ がコーシー列とならない z でこの冪級数は発散するという。収束する点 z の全体をこの冪級数の収束域という。$f(z)$ を収束域上の函数と考えることができる。ここで，

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup_{n\leq k}\{\sqrt[k]{|a_k|}\}=\rho$$

と置く。ここで $\sup_{n\leq k}\{\sqrt[k]{|a_k|}\}=\alpha_n$ は n 以上の k に対して $\sqrt[k]{|a_k|}\leq\alpha_n$ で任意の自然数 ℓ に対して $\alpha_n-\frac{1}{\ell}\leq\sqrt[k(\ell)]{|a_{k(\ell)}|}$ を満たす自然数 $k(\ell)\geq n$ があることである。$0<\rho<\infty$ のとき $R=\frac{1}{\rho}$ として，$0<|z-z_0|<R$ ならば $\frac{1}{|z-z_0|}>\rho_1>\rho$ となる ρ_1 に対して，$sup_{n_1\leq k}\{\sqrt[k]{|a_k|}\}\leq\rho_1$ となる n_1 がとれる。$n_1\leq n<m$ として，

$$|f_m(z)-f_n(z)|\leq\sum_{k=n+1}^m|a_k(z-z_0)^k|\leq\sum_{k=n+1}^m\rho_1^k|z-z_0|^k\leq\frac{(\rho_1|z-z_0|)^{n+1}}{1-\rho_1|z-z_0|}$$

より，$\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ がコーシー列となっていることが分る。逆に $|z-z_0|>R$ ならば $\frac{1}{|z-z_0|}<\rho_2<\rho$ となる ρ_2 に対して，$sup_{n_2\leq k}\{\sqrt[k]{|a_k|}\}\geq\rho_2$ となる n_2 がとれる。

そこで，$\sqrt[n]{|a_2|}\} \geq \rho_2$ となる $n \geq n_2$ がある。

$$|f_n(z) - f_{n-1}(z)| = |a_n(z-z_0)^n| \geq (\rho_2^k|z-z_0|)^n > 1$$

より，$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ が発散することが分る。$\{z : |z-z_0| < R\}$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ の収束円といい収束域に含まれる。$\rho = \infty$ のとき $R = 0$，$\rho = 0$ のとき $R = \infty$ として，この R を級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径という。$R = 0$ のとき，収束域は z_0 のみであり，$R = \infty$ のとき，収束域は $\mathbb{C}$ である。

例　指数函数，三角函数, 双曲線函数は次の様に級数表示される $\mathbb{C}$ 上の函数である。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos\ z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sin\ z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cosh\ z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sinh\ z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

注　双曲線函数は,

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$$

が成立することでこのように名づけられている。また加法公式は,

$$\cosh\ (z_1 + z_2) = \cosh\ z_1 \cosh\ z_2 + \sinh\ z_1 \sinh\ z_2$$

$$\sinh\ (z_1 + z_2) = \sinh\ z_1 \cosh\ z_2 + \cosh\ z_1 \sinh\ z_2$$

となる。

3.4　逆函数

複素平面上の領域 G_1 から G_2 の上への函数 f があるとき，G_2 の点 w に対して，$f^{-1}(w) = \{z : f(z) = w\}$ を考える。一般的にはこの集合の元の個数は一つとは限らないが G_2 から G_1 への対応を与えるものとして f の逆函数とよぶ。$f^{-1}(w)$ の個数が２以上になる w があるとき多価函数という。

例　$w = f(z) = z^2$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への函数である。この関係は極形式 $w = Re^{i\alpha}$, $z = re^{i\theta}$ を使って，$Re^{i\alpha} = r^2 e^{2i\theta}$ となるから $r = \sqrt{R}$, $\theta = \frac{1}{2}\alpha + n\pi$ で表される。そこで，$f^{-1}(w) = \{\sqrt{R}e^{i\alpha/2}, -\sqrt{R}e^{i\alpha/2}\}$ を得てこの逆函数を $f^{-1}(w) = \sqrt{w}$ で表して値

が２個あるので２価函数という。実函数の時 $\pm\sqrt{x}$ のように表すことがあるが，複素函数としては $\pm$ を使わずに二つとも表しているとするのである。

指数函数の逆函数

指数函数 $w = g(z) = e^z$ の逆函数を考えよう。$w = Re^{i\alpha} = e^{x+iy}$ より $e^x = R,\ y = \alpha + 2n\pi\ n \in \mathbb{Z}$ を得て，

$$g^{-1}(w) = \{\log|w| + i(\arg w + 2n\pi) : n \in \mathbb{Z}\}$$

となる。指数函数の逆函数を対数函数とよんで　$g^{-1}(w) = Log\ w$ で表して 値が無限にあるので無限多価函数という。$\log\ \ w = \log|w| + i\arg\ \ w$　を対数の主値とよぶ。実函数として使われてきた対数関数はこの主値を表していると考えてよい。記号としても整合性がある。ここでは大文字で主値を表す通常の方式に従わない所以である。

三角函数の逆函数

$w = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ より，

$$0 = (e^{iz})^2 - 2iwe^{iz} - 1 = (e^{iz} - iw)^2 - 1 + w^2$$

を得る。これから $e^{iz} = iw + \sqrt{1-w^2}$，従って，

$$z = -iLog\ (iw + \sqrt{1-w^2}) = Sin^{-1}\ w$$

と表される。これは２価函数 $\sqrt{1-w^2}$ と無限多価函数 Log が組合わさった無限多価函数となっている。同様に $w = \cos\ z$ の逆函数は，

$$z = -iLog\ (w + \sqrt{w^2-1}) = Cos^{-1}\ w$$

と表される。

3.5　一般冪函数

複素数 $A \in \mathbb{C}$ に対して，一般冪函数を $z^A = e^{ALogz} = e^{A(log|z|+i(\arg z+2n\pi)}$ で定義する。$A \in \mathbb{Z}$ のとき値は一つに定まって一価函数となり，$A = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q},\ (\dfrac{q}{p}$ 既約) のとき値は p 個あり p 価函数となり，$A \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ のとき値は無限個あり無限多価函数となる。

例

$$i^i = \{e^{i(log|i|+i(\arg i+2n\pi)} : n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{(-2n+\frac{1}{2})\pi} : n \in \mathbb{Z}\}$$

（私の愛情は実で大きな値から小さな値まで様々な様相を呈する！）

注意　$f(z) = e^z$ と $g(z) = z^\alpha$ に対して $f(\alpha) = e^\alpha$ そして $g(e) = e^\alpha$ となって e^α の表示は同じであるが此のふたつは全く異なるものである事に注意しておこう。例えば $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき

$$e^{\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!} = \sqrt{e},\ e^{\frac{1}{2}} = g(e) = \{e^{\frac{1}{2}(log\ \ e+2n\pi i)} : n \in \mathbb{Z}\} = \pm\sqrt{e}$$

(ここで $\sqrt{\ }$ は実のものとしている）どちらであるかは状況に応じて判断しなければならない。

第4章　複素微分

実函数で習う微分の定義と形は全く同じなのだが，異なる場に置かれると違う側面を表して来る不思議。妖しい光芒を放ってくる。

4.1　複素微分の定義

領域 G 上の函数 $w = f(z)$ を観察してみよう。G 内を変数 z が動いて z_0 に収束するとき $f(z)$ は w_0 に収束する状態を次で定義する。

$$^{\exists}N(k) \in \mathbf{N}\ s.t.\ 0 < |z - z_0| < 10^{-N(k)} \Longrightarrow |f(z) - w_0| < 10^{-k}$$

これを $\lim_{n\to z_0} f(z) = w_0$ で表す。このような $N(k)$ が見つからないとき，$\lim_{n\to z_0} f(z)$ は発散する又は収束しないという。そして $z_0 \in G$　に対して $\lim_{n\to z_0} f(z) = f(z_0)$ となるとき f は z_0 で連続であるといい，G の各点で連続となるとき f は G 上連続であるという。G 上連続な函数の全体を $C(G) = \{f : f$ は G 上連続$\}$ と表す。更に，

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w_1$$

となるとき f は z_0 で複素微分可能といい，$w_1 = f'(z_0)$ と表して $f'(z_0)$ を z_0 における複素微分係数という。$f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) = o(z - z_0)$ とおけば，f が z_0 で複素微分可能であることは $\displaystyle\lim_{n\to z_0} \frac{o(z - z_0)}{z - z_0} = 0$ と同値であって z_0 の近傍で $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ が f の最良一次近似式となっていることを意味している。これより f は z_0 で連続となっている事が分る．また，この一次式は $(z_0, f(z_0))$ を原点とする座標 (dz, df) で $df = f'(z_0)dz$ と表されこれを f の微分という。G の各点で f が複素微分可能となるとき，f は G 上複素微分可能であるといい，G 上複素微分可能な函数の全体を $A(G) = \{f : f$ は G 上複素微分可能$\}$ と表す。$A(G)$ に属する函数は後で示される結果から G 上正則または解析的といわれる。$f \in A(G)$ に対して $f'(z)$ は G 上の函数となって f の 1 階導函数といわれる。更に $f' \in A(G)$ となればこの導函数を $f'' = f^{(2)}$ と表して f の 2 階導函数という。このようにして n 階導函数 $f^{(n)} \in A(G)$ の導函数として $(n + 1)$ 階導函数が定義される。これらを高階導函数という。

例　$f(z) = 1$ のとき $f'(z) = 0$，$f(z) = z$ のとき $f'(z) = 1$, $f(z) = z^2$ のとき $z^2 = (z - z_0 + z_0)^2 = (z_0)^2 + 2z_0(z - z_0)$ より $f'(z_0) = 2z_0$ 即ち $f'(z) = 2z$，$f(z) = z^n$ のとき $z^n = (z - z_0 + z_0)^n = (z_0)^n + nz_0^{n-1}(z - z_0) + \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k z_0^{n-k}(z - z_0)^k$ より $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$ 即ち $f'(z) = nz^{n-1}$。次に $f(z) = \bar{z}$ については，$\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{\overline{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$ に

注意すれば $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{z+\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z}$ は収束しない。$\bar{z}$ は $\mathbb{C}$ 上どこでも複素微分可能でない。$f(z) = \bar{z}^2$ については，$\lim_{z \to z_0} \dfrac{\overline{z+\Delta z}^2 - \bar{z}^2}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \dfrac{2\bar{z}\overline{\Delta z} + \overline{\Delta z}^2}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} 2\bar{z}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ より，これは $z=0$ のとき 0 に収束し，$z \neq 0$ のときは収束しない。従って，$\bar{z}^2$ は $z=0$ で複素微分可能で 0 以外では複素微分可能でない。f は z_0 を含むある領域で複素微分可能となるとき z_0 で正則という。$f(z) = \bar{z}^2$ は 0 で正則でない。函数 f が領域 G 上正則でその境界 ∂G の各点でも正則となるとき $\bar{G}$ で正則という。このような函数の族を $A(\bar{G})$ で表す。

4.2　合成函数の微分

z_0 の近傍で定義されている函数 f と $w_0 = f(z_0)$ の近傍で定義されている函数 g の合成函数 $g \circ f$ を考える。f は z_0 で g は w_0 で複素微分可能とすれば，$g \circ f$ は z_0 で複素微分可能となって $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$ となる。z_0 の十分近くにある z に対して $f(z) \neq w_0$ となっている場合は，

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g'(w_0)f'(z_0)$$

を得る。z_0 のどんな近くにも $f(z) = w_0$ となる z がある場合は，

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

即ち，

$$k <^{\exists} N(k)\ s.t.\ 0 < |z - z_0| < 10^{-N(k)} \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < 10^{-k}|z - z_0|$$

となる。また，

$$g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}$$

より，

$$^{\exists}N_1\ s.t.\ 0 < |w - w_0| < 10^{-N_1} \Longrightarrow \left| \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \right| < 10^{-1}$$

だから $|g(w) - g(w_0)| < (|g'(w_0)| + 10^{-1})|w - w_0|$ を得る。$|g'(w_0)| + 10^{-1} < 10^{\ell}$ として　$N_1 + \ell$ より大きい k に対して，$|z - z_0| < 10^{-N(k)}$ のとき，

$$|f(z) - f(z_0)| < 10^{-k}|z - z_0| < 10^{-N_1}$$

となるから，

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| < 10^{\ell}|f(z) - f(z_0)| < 10^{\ell}10^{-k}|z - z_0|$$

即ち $\left| \dfrac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \right| < 10^{-(k-\ell)}$ となり，

$$(g \circ f)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

を得る。この場合も $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$ となる。

4.3 逆函数の微分

f は z_0 で 複素微分可能で $f'(z_0) \neq 0$ として f の逆函数 g が $w_0 = f(z_0)$ の近傍で一価な函数として定義されていれば，$g \circ f(z) = z$ だから，両辺を微分して $g'(w_0)f'(z_0) = 1$ より $g'(f(z_0)) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$ 即，

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

を得る。

4.4 微分演算

領域 G で微分可能な函数 $f,\ g$ に対して次のように演算してよい。
一次結合の微分

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{C})$$

積の微分

$$(fg)' = \left(\frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}\right)' = \frac{1}{2}((f+g)(f+g)' - (f-g)(f-g)') = f'g + fg'$$

ここで $fg = 1$ のとき $f'g + fg' = 0$ だから，

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = f' = -\frac{fg'}{g} = -\frac{g'}{g^2}$$

商の微分は積の微分を使って，

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

4.5 指数函数の微分

指数函数 $f(z) = e^z$ の微分を考える。$|z| < 1$ に対して，

$$|e^z - 1 - z| = \left|\sum_{n=2} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=2} \left(\frac{|z|}{2}\right)^n = \frac{|z|^2}{4 - 2|z|}$$

だから，

$$\lim_{z \to 0} \left|\frac{e^z - 1 - z}{z}\right| \leq \lim_{z \to 0} \frac{|z|}{4 - 2|z|} = 0$$

従って，

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - e^0}{z} = 1$$

そして指数法則を用いて,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} = e^{z_0}$$

複素平面上指数函数の導函数

$$(e^z)' = e^z$$

を得る。更に，複素数 α に対して合成函数の微分を用いて,

$$(e^{\alpha z})' = \alpha e^{\alpha z}$$

三角函数の微分は,

$$(\cos\ z)' = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin\ z$$

$$(\sin\ z)' = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos\ z$$

逆函数の一価とみられる部分（分枝とよばれる）をとり出して微分を考える。
対数函数の微分
$w = \log\ z$ に対して,

$$(\log\ z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

逆三角函数の微分
$w = \cos^{-1}\ z$ に対して,

$$(\cos^{-1}\ z)' = \frac{1}{-\sin w} = \frac{1}{-\sqrt{1 - (\cos\ w)^2}} = \frac{1}{-\sqrt{1 - z^2}}$$

$w = \sin^{-1}\ z$ に対して,

$$(\sin^{-1}\ z)' = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin\ w)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

4.6 偏微分

z_0 の近傍で定義された函数 $f(z)$ に対して,

$$^\exists N(k) \in \mathbb{N}\ s.t. -10^{-N(k)} < x < 10^{-N(k)},\ x \neq 0 \Longrightarrow \left| \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} - \alpha \right| < 10^{-k}$$

となるとき,

$$\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} = f_x(z_0)$$

と表して f の x による偏微分という。同様に,

$$^\exists N(k) \in \mathbb{N}\ s.t. -10^{-N(k)} < y < 10^{-N(k)},\ y \neq 0 \Longrightarrow \left| \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{y} - \beta \right| < 10^{-k}$$

となるとき，

$$\beta = \lim_{y \to 0} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{y} = f_y(z_0)$$

と表して f の y による偏微分という。f の実部 u，虚部 v とすれば，

$$f_x = u_x + iv_x,\ f_y = u_y + iv_y$$

領域 G 上の各点で偏微分があれば G 上の函数 f_x, f_y が定義され，これを f の 1 階偏導函数という。これらがもう一度偏微分できれば，$f_{xx} = (f_x)_x, f_{yx} = (f_y)_x, f_{xy} = (f_x)_y, f_{yy} = (f_y)_y$ が得られこれらを 2 階偏導函数という。n 階偏導函数の偏微分によって，$(n+1)$ 階偏導函数が定義される。G 上 n 階偏導函数すべてが連続となる函数の全体を $C^n(G)$ と表す。$f \in C^n(G)$ に作用して $f_x, f_y \in C^{n-1}(G)$ を対応させることを，

$$\frac{\partial}{\partial x} : C^n(G) \longrightarrow C^{n-1}(G),\ \frac{\partial}{\partial y} : C^n(G) \longrightarrow C^{n-1}(G)$$

で示して，$\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ を偏微分作用素という。

4.7 コーシー・リーマンの偏微分方程式

$f = u + iv$ が z_0 で複素微分可能ならば，

$$f_x(z_0) = f'(z_0) = \frac{1}{i} f_y(z_0)$$

であるから $u_x + iv_x = -iu_y + v_y$ となり，

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x$$

を得る。これをコーシー・リーマンの偏微分方程式という。

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),\ \lim_{z \to z_0} \frac{o(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

で $z = z_0 + x + iy,\ o(z - z_0) = o_1(x + iy) + io_2(x + iy)$ として実部虚部をみれば，

$$u(z) = u(z_0) + u_x(z_0)x - v_x(z_0)y + o_1(x + iy),\ \lim_{x \to 0, y \to 0} \frac{o_1(x + iy)}{|x + iy|} = 0$$

$$v(z) = v(z_0) + v_x(z_0)x + u_x(z_0)y + o_2(x + iy),\ \lim_{x \to 0, y \to 0} \frac{o_2(x + iy)}{|x + iy|} = 0$$

となって，これは $u,\ v$ を実 2 変数の函数とみて全微分可能で

$$-v_x(z_0) = u_y(z_0),\ u_x(z_0) = v_y(z_0)$$

を満たすことを意味する。これより $f = u + iv$ が複素微分可能であることと，u, v が全微分可能でコーシー・リーマンの偏微分方程式を満たすこととが同値となる。偏導函数 u_x, v_x, u_y, v_y が連続なときは，全微分可能であることが知られているからコーシー・リーマンの偏微分方程式が満たされれば，$f = u + iv$ は複素微分可能となる。

4.8 複素偏微分

函数 $f=u+iv$ の z と $\bar{z}$ に関する複素偏微分（ウ゛ィルティンガー微分）を次で定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}(u_x+v_y+i(v_x-u_y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}(u_x-v_y+i(v_x+u_y))$$

$\dfrac{\partial}{\partial z}$，$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ は $C^n(G)$ から $C^{n-1}(G)$ への偏微分作用素になっている。これにより
コーシー・リーマンの偏微分方程式は，

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$$

で表され，f が複素微分可能な場合は，

$$f'=\frac{\partial f}{\partial z}$$

となる。

4.9 調和函数

領域 G 上で $C^2(G)$ から $C(G)$ への偏微分作用素

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}=4\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

をラプラス作用素またはラプラシアンとよび，函数 $u\in C^2(G)$ がラプラスの方程式 $\triangle u=0$ を満たすとき u は G 上調和または調和函数という。領域 G 上の実数値函数　$u,\ v\in C^2(G)$ で $f=u+iv\in A(G)$ となるとき，$u,\ v$ はコーシー・リーマンの偏微分方程式を満たすから $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ で，これらの両辺を偏微分して $u_{xx}=v_{yx},\ u_{yy}=-v_{xy}$ を得る。ここで $v_{yx},\ v_{xy}$ が連続であるときは等しいことが知られている事を用いれば，$u_{xx}+u_{yy}=0$ となり u は調和である事が分る。同様に v も調和となる。即ち，正則函数の実部虚部は調和である。この虚部 v を実部 u の共役調和函数という。$-if=v-iu\in A(G)$ を考えれば v の共役調和函数は $-u$ である。

例　$u=x^3-3xy^2$ に対して $u_x=3x^2-3y^2,\ u_{xx}=6x,\ u_y=-6xy,\ u_{yy}=-6y$ より $\triangle u=0$ だから u は調和函数である。u の共役調和函数 v を求めてみよう。コーシー・リーマンの偏微分方程式から $v_x=-u_y=6xy$ を満たし，$v=3x^2y-C(y)$ ($C(y)$ は y の函数) のように表わされることが分る。また，$v_y=u_x=3x^2-3y^2$ でもあるから，$3x^2-C'(y)=3x^2-3y^2$ となり $C'(y)=3y^2$ を得る。そこで $C(y)=y^3+C$ の形をしている事が分る。従って，$v=3x^2y-y^3-C$ を得る。$f(z)=u+iv=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3-C)=z^3-iC$ で $\mathbb{C}$ 上の正則函数となっている。

4.10 冪級数の微分

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ の収束域で定義される函数を $f(z)$，収束半径を R とする。z_0 中心，半径 R_1 $(0 < R_1 < R)$ の閉円盤内の点 $z,\ z_1$ に対して,

$$|a_n\sum_{k=0}^{n-1}(z-z_0)^{n-1-k}(z_1-z_0)^k| \le |a_n|\sum_{k=0}^{n-1}|(z-z_0)^{n-1-k}(z_1-z_0)^k| \le n|a_n|R_1^{n-1}$$

また，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^n$ で,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

に注意すればこの収束半径も R となり，$\displaystyle\frac{1}{R_1}\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|R_1^n$ は収束するから,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sum_{k=0}^{n-1}(z-z_0)^{n-1-k}(z_1-z_0)^k)$$

も収束し，これを $g(z)$ とおく。$z \neq z_1$ のとき,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1} = \frac{1}{z-z_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n((z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n)$$

$$= \frac{1}{z-z_1}(f(z)-f(z_1))$$

自然数 $N(k)$ を $\sum_{n=N(k)}^{\infty} n|a_n|{R_1}^{n-1} < 10^{-k}$ となるようにとり,

$$\sum_{n=0}^{N(k)} a_n\frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1} = g_k(z)$$

が連続であることから，自然数 $N_1(k)$ が $|z-z_1| < 10^{-N_1(k)}$ のとき,

$$|g_k(z)-g_k(z_1)| < 10^{-k}$$

となるようにとれる。そこで,

$$|g(z)-g(z_1)| \le |g_k(z)-g_k(z_1)| + \sum_{n=N(k)}^{\infty} n|a_n|{R_1}^{n-1} < 2\times 10^{-k}$$

によって，$g(z)$ が $z = z_1$ で連続であることが分る。従って,

$$g(z_1) = \lim_{z\to z_1} g(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = f'(z_1)$$

となり，$f(z)$ は収束円内で微分可能となり,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$$

と導函数が冪級数として表され，上記によりこの収束半径も R となる。以上反復して収束円内で $f(z)$ は何回でも微分でき，k 階導函数は,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n\frac{n!}{(n-k)!}(z-z_0)^{n-k}$$

となる。これから $f^{(k)}(z_0)=k!a_k$ を得て,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^n$$

と表される。

4.11 等角写像

区間 $[a,b]$ から複素平面への連続写像 $z(t)=x(t)+iy(t)$ の像として連続曲線

$$C=\{z(t):a\leq t\leq b,\ z(t)\ \text{は}\ [a,b]\ \text{上の連続函数}\}$$

を考える。$z(a)$ を C の始点，$z(b)$ を C の終点とよび， C は始点から終点に向かって進むように向き付けられているとする。 C が $z(t_0)$ で接線を持つことを,

$$\lim_{t\to t_0+}\arg(z(t)-z(t_0))=\lim_{t\to t_0-}\arg(z(t_0)-z(t))$$

が成り立つことで定義し，この極限値 θ を実軸と接線のなす角とする。C を含む領域上の函数 $w=f(z)$ が $z_0=z(t_0)$ で微分可能で $f'(z_0)\neq 0$ としよう。C の f による像 $f(C)=\{f(z(t)):a\leq t\leq b\}$ も連続曲線となる。f が微分可能であることから,

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|=|f'(z_0)|,\quad \lim_{z\to z_0}\arg\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)=\arg f'(z_0)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0+}\arg(f(z(t))-f(z(t_0)))&=\arg f'(z_0)+\lim_{t\to t_0+}\arg(z(t)-z(t_0))\\&=\arg f'(z_0)+\lim_{t\to t_0-}\arg(z(t_0)-z(t))=\lim_{t\to t_0-}\arg(f(z(t_0))-f(z(t)))\end{aligned}$$

となって，$w_0=f(z_0)$ で $f(C)$ は接線をもち，その接線と実軸のなす角は $\theta+\arg f'(z_0)$ である。 z_0 で接線を持つ別の連続曲線 C_1 を考えれば，これら 2 つの接線のなす角は $f(C)$ と $f(C_1)$ の w_0 における接線のなす角に等しいことが分る。このような性質を f は z_0 で等角性を保つという。領域 G 上複素微分可能な函数で導函数が 0 をとらなければ等角写像と呼ばれる。等角写像は通常 G 上 1 対 1 であるとの条件を付して使われる。導函数が 0 をとらない点のある近傍に限れば近似的に一次式で 1 対 1 になっている。

第5章　複素線積分

Cauchy の積分定理，主張はなんと単純だろう。単純故に美しく力強い．

5.1　いろいろな線積分

連続曲線 $C = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\}$ が区分的に C^1 級であるとは区間 $[a, b]$ の有限分割 $\Delta_0 : a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ があって $z_t = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt}$（端点では片側微分とする） が $[a_{i-1}, a_i]$ で連続で 0 をとらないこととする。 C 上の連続函数 $f(z)$ の C に沿う線積分を，

$$\int_C f(z)dz = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})) = \int_a^b f(z(t))z_t(t)dt,$$

$$(\Delta : a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b,\ |\Delta| = \max_{1\leq k\leq n}\{t_k - t_{k-1}\},\ t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k)$$

で定義する。連続曲線 $C_1 = \{z_1(s) = x_1(s)+iy_1(s) : c \leq s \leq d\}$ が区分的に C^1 級でその像が C に一致すれば，$t \in [a, b]$ に対して $z_1(s) = z(t)$ を満たす $s = s(t) \in [c, d]$ を対応させて単調増加な函数 $s : [a, b] \to [c, d]$ を得て，$[a, b]$ 上有限個の点を除いて $\dfrac{dz}{dt}(t) = \dfrac{dz_1}{ds}(s(t))\dfrac{ds}{dt}(t)$ が成り立つ。置換積分を用いて，

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_c^d f(z_1(s))(z_1)_s(s)ds = \int_a^b f(z_1(s(t)))(z_1)_s(s(t))s_t(t)dt$$

$$= \int_a^b f(z(t))z_t(t)dt = \int_C f(z)dz$$

が成り立つから f の C に沿う複素線積分は区分的に C^1 級である連続曲線のパラメーターのとり方には依存せずに定まる。連続曲線 $C = \{z(t) = x(t)+iy(t) : a \leq t \leq b\}$ とは向きが逆になった連続曲線 $-C = \{z_1(s) = x(-s) + iy(-s) : -b \leq s \leq -a\}$ に沿う f の線積分は，

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z_1(s))(z_1)_s(s)ds = \int_b^a f(z_1(-t))(z_1)_s(-t)(-1)dt,$$

$$= -\int_a^b f(z(t))z_t(t)dt = -\int_C f(z)dz$$

となって符号を変える。区分的に C^1 級の連続曲線の和

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \quad (C_k = \{z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t) : a_k \leq t \leq b_k\})$$

に沿う線積分を，

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$

として扱う。C 上の函数 $f,\ g$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\int_C \alpha f(z) + \beta g(z)dz = \alpha \int_C f(z) + \beta \int_C g(z)dz$$

が成立することは定義より分る。次の不等式はよく利用される。

$$|\int_C f(z)dz| \leq \int_a^b |f(z(t))z_t(t)|dt$$

実際，$arg \int_C f(z)dz = \theta$ と置けば，

$$|\int_C f(z)dz| = e^{-i\theta} \int_C f(z)dz = \int_a^b Re(e^{-i\theta} f(z(t))z_t(t))dt \leq \int_a^b |f(z(t))z_t(t)|dt$$

次に絶対値線積分を，

$$\int_C f(z)|dz| = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|z(t_k) - z(t_{k-1}| = \int_a^b f(z(t))|z_t(t)|dt$$

と定義すれば上記と同様にして，

$$\int_{-C} f(z)|dz| = \int_{-b}^{-a} f(z_1(s))|(z_1)_s(s)|ds = \int_b^a f(z_1(-t))|(z_1)_s(-t)|(-1)dt,$$

$$= \int_a^b f(z(t))|z_t(t)|dt = \int_C f(z)|dz|$$

この場合は符号を変えない。また，

$$|\int_C f(z)|dz|| \leq \int_C |f(z)||dz|$$

となる。複素偏微分の場合のように次の線積分を定義して使うことにしよう。

$$\int_C f(z)d\bar{z} = \overline{\int_C \overline{f(z)}dz}$$

$$\int_C f(z)dx = \frac{1}{2}(\int_C f(z)dz + \int_C f(z)d\bar{z})$$

$$\int_C f(z)dy = \frac{1}{2i}(\int_C f(z)dz - \int_C f(z)d\bar{z})$$

この定義を用いれば $f = u + iv$ に対して，

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(z)dx - \int_C v(z)dy + i(\int_C v(z)dy + \int_C u(z)dy)$$

$$= \int_C (u(z) + iv(z))(dx + idy)$$

のように扱える。

例　連続曲線 $C=\{e^{it};0\leq t\leq 2\pi\}$ は 0 中心の単位円周を表す。函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ の C に沿う線積分は定義に従って，

$$\int_C f(z)dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$

と計算できる。この単位円周に沿っての線積分は簡単ながら非常に重要な役割を果たし，

$$\int_C f(z)dz=\oint_{|z|=1}f(z)dz$$

のように表される。

5.2　微分形式

G を $\mathbb{C}$ 内の領域として G 上の連続函数 $p,\ q$ で $pdx+qdy=(\frac{p}{2}+\frac{q}{2i})dz+(\frac{p}{2}-\frac{q}{2i})d\bar{z}$ のように表されるものを G 上の微分形式という。G 内で z_0 を始点とし z を終点とする区分的に C^1 級の連続曲線 C に沿う線積分 $\int_C pdx+qdy$ の値 $F(z)$ が C の選び方に依らず z のみによって定まるとする。このとき，C が終点 z 近くで実軸に平衡になっているとすれば $\dfrac{\partial F}{\partial x}=p$ が分かり, z 近くで虚軸に平衡になっているとすれば $\dfrac{\partial F}{\partial y}=q$ が分る。このような $pdx+qdy$ を完全微分形式という。G 上の連続函数 f に対して $f(z)dz$ が完全微分形式になっているとすれば，C^1 級の函数 F によって $dF=F_xdx+F_ydy=F_zdz+F_{\bar{z}}d\bar{z}=fdz$ と表されるから $F_z=f,\ F_{\bar{z}}=0$ となりコーシーリーマンの微分方程式を満たし，F そして $f=F'$ は正則函数となっている。

5.3　コーシーの積分定理

長方形状閉領域 $R=\{z=x+iy;a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$ の近傍で正則な函数 f に対して，長方形の周 ∂R の向きは反時計回りとして，

$$\int_{\partial R}f(z)dz=0$$

が成り立つ。

R を 4 等分して $\{R^i\}_1^4$ をとり，

$$\eta(R)=\int_{\partial R}f(z)dz=\sum_{i=1}^4\int_{\partial R^i}f(z)dz=\sum_{i=1}^4\eta(R^i)$$

と置く。$|\eta(R)|\leq\sum_{i=1}^4|\eta(R^i)|$ だから少なくともひとつの R^i に対して $|\eta(R^i)|\geq\dfrac{1}{4}|\eta(R)|$ を満たす。この R^i を R_1 とする。R_1 を 4 等分してその中から R_2 が

$|\eta(R_2)| \geq \dfrac{1}{4}|\eta(R_1)| \geq \dfrac{1}{4^2}|\eta(R)|$ を満たすように選べる。同様にして R_{n-1} を 4 等分してその中から R_n が $|\eta(R_n)| \geq \dfrac{1}{4}|\eta(R_{n-1})| \geq \dfrac{1}{4^n}|\eta(R)|$ を満たすように選べる。$\cap_{n=1}^{\infty} R_n = z^* \in R$ と置けば f は z^* で微分可能だから，

$$0 < |z - z^*| < 10^{-N(k)} \Longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < 10^{-k}$$

従って，

$$|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < 10^{-k}|z - z^*|$$

を得る。十分大きい n をとれば $R_n \subset \{z; |z - z^*| < 10^{-N(k)}\}$ となり，

$$\int_{\partial R_n} dz = 0,\ \int_{\partial R_n} z dz = \int_{\partial R_n} \frac{1}{2} dz^2 = 0$$

に注意して，

$$|\eta(R_n)| = |\int_{\partial R_n} f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)dz| \leq 10^{-k} \int_{\partial R_n} |z - z^*||dz|$$

を得る。R の対角線の長さを d，周囲の長さを L とすれば，R_n の対角線の長さは $2^{-n}d$，周囲の長さは $2^{-n}L$ となり，

$$\frac{1}{4^n}\eta(R) \leq |\eta(R_n)| \leq 10^{-k} \int_{\partial R_n} |z - z^*||dz| \leq 10^{-k} \frac{d}{2^n} \frac{L}{2^n}$$

即ち $|\eta(R)| \leq 10^{-k} dL$ となり，これは $\eta(R) = 0$ を示している。

長方形状閉領域 $R = \{z = x + iy; a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ の近傍で $\zeta = \xi + i\eta$ を除いて正則な函数 f が $\lim_{z \to \zeta}(z - \zeta)f(z) = 0$ を満たせば，$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ が成り立つ。

条件より，$0 < |z - \zeta| < 10^{-N(k)} \Longrightarrow |(z - \zeta)f(z)| < 10^{-k}$ となる $N(k)$ がとれる。そして，$\dfrac{10^{-N(k)}}{\sqrt{2}}$ より小さい正数 δ をとり，

$$R_0 = \{z = x + iy : |x - \xi| < \delta,\ |y - \eta| < \delta\} \subset R$$

と置けば，

$$|\int_{\partial R} f(z)dz| = |\int_{\partial R_0} f(z)dz| \leq \int_{\partial R_0} \frac{10^{-k}}{|z - \zeta|}|dz| = 8 \times 10^{-k}$$

開円盤 Δ から有限個の点 $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$ を除いた領域を Δ' として，函数 $f \in A(\Delta')$ が $\lim_{z \to \zeta_j}(z - \zeta_j)f(z) = 0,\ (j = 1, 2, ...n)$ を満たせば，Δ' 内の閉曲線 C に対して $\int_C f(z)dz = 0$ が成り立つ。

点 $z_0 \in \Delta'$ と $z \in \Delta'$ を軸に平衡な線分和で結ぶことにして，実軸に平衡に z_0 を出て実軸に平衡に z に入るものを C_R，虚軸に平衡に z_0 を出て虚軸に平衡に z に入るものを C_I とすれば，

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{C_I} f(z)dz = F(z)$$

となって，$F_x = f = -iF_y$ が成立し，F は Δ' 上正則となって $dF = fdz$ は Δ' 上完全微分となる。従って，$\int_C f(z)dz = 0$ が成立する。

5.4　回転数

複素平面上の点 a を通らない区分的に C^1 級である連続曲線 $C=\{z(t);\alpha\le t\le\beta\}$ に対して，

$$h(t)=\int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t)-a}dt$$

と置けば，これは区間 $[\alpha,\beta]$ 上の連続函数となり，有限個の点を除いた $z'(t)$ が連続な点では $h'(t)=\dfrac{z'(t)}{z(t)-a}$ である。$H(t)=e^{-h(t)}(z(t)-a)$ を考えれば，

$$H'(t)=-h'(t)e^{-h(t)}(z(t)-a)+e^{-h(t)}z'(t)=e^{-h(t)}(-z'(t)+z'(t))=0$$

が有限個の点を除いて成り立つ。$H(t)$ は区間 $[\alpha,\beta]$ 上の連続函数であることに注意すれば，$H(t)=e^{-h(\alpha)}(z(\alpha)-a)=z(\alpha)-a$ である定数函数となり，$e^{h(t)}=\dfrac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}$ を得る。更に，C を閉曲線とすれば，$z(\alpha)=z(\beta)$ で $e^{h(\beta)}=\dfrac{z(\beta)-a}{z(\alpha)-a}=1$ となって $h(\beta)=2n\pi i, n\in Z$ となる。そこで a に関する閉曲線 C の回転数を，

$$n(C,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-a}dz$$

で定義する。閉曲線 C に関する a の指数とも呼ばれている。5.1 例より，単位円周（反時計回り）の 0 に関する回転数は 1 となっている。閉曲線 C の a の回りの回転数は, a の回りを C が総合して反時計回りに何回回ったかを表していることが実感できるだろう。

5.5　コーシーの積分公式

開円盤 Δ 上の正則函数 $f(z)$ に対して $F(z)=\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ と置けば，

$$F\in A(\Delta-\{a\}),\ \lim_{z\to a}F(z)(z-a)=\lim_{z\to a}(f(z)-f(a))=0$$

故，Δ 内の a を通らない区分的に C^1 級である連続曲線 C に対して，$\int_C F(z)dz=0$ となる。これより，

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_C \frac{f(a)}{z-a}dz=2\pi i f(a)n(C,a)$$

そこで，$n(C,z)=1$ の時，コーシーの積分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

を得る。

5.6 コーシー型積分

区分的に C^1 級である連続曲線 C 上の連続函数 φ に対してコーシー型積分

$$\Phi_n(z) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

を考える。次の関係 $\Phi'_n(z) = n\Phi_{n+1}(z)$ が成り立ち，$\Phi_n(z)$ は $\mathbb{C} - C$ で正則である。
実際，$z_0 \notin C$ に対して，

$$\Phi_1(z) - \Phi_1(z_0) = \int_C \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = (z - z_0) \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

ここで C と交わらないように円盤 $\{z; |z - z_0| < \delta\}$ をとれば，$|z - z_0| < \delta/2$ を満たす点 z と C の距離は $\delta/2$ 以上だから，

$$|\Phi_1(z) - \Phi_1(z_0)| < |z - z_0| (\frac{2}{\delta})^2 \int_C |\varphi(\zeta)||d\zeta|$$

となって $\Phi_1(z)$ が z_0 で連続であることが分る。C 上の連続函数 $\tilde{\varphi} = \dfrac{\varphi}{z - z_0}$ に対するコーシー型積分を $\tilde{\Phi}_n(z) = \displaystyle\int_C \frac{\tilde{\varphi}(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$ とすれば，$\tilde{\Phi}_1(z)$ も z_0 で連続となるから，

$$\tilde{\Phi}_1(z_0) = \lim_{z \to z_0} \tilde{\Phi}_1(z) = \lim_{z \to z_0} \int_C \frac{\tilde{\varphi}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{z \to z_0} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

$$= \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \Phi_2(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\Phi_1(z) - \Phi_1(z_0)}{z - z_0} = \Phi'_1(z_0)$$

こうして $\Phi'_1(z_0) = \Phi_2(z_0)$ そして $\tilde{\Phi}'_1(z_0) = \tilde{\Phi}_2(z_0)$ が分る。次に，
$\Phi'_{n-1}(z_0) = (n-1)\Phi_n(z_0)$ そして $\tilde{\Phi}'_{n-1}(z_0) = (n-1)\tilde{\Phi}_n(z_0)$ が成り立つとすれば，

$$\Phi_n(z) - \Phi_n(z_0) = \int_C \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right) d\zeta$$

$$= \int_C \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n-1}(\zeta - z_0)} \right) d\zeta$$

$$= \tilde{\Phi}_{n-1}(z) + (z - z_0)\tilde{\Phi}_n(z) - \tilde{\Phi}_{n-1}(z_0)$$

従って，

$$\frac{\Phi_n(z) - \Phi_n(z_0)}{z - z_0} = \frac{\tilde{\Phi}_{n-1}(z) - \tilde{\Phi}_{n-1}(z_0)}{z - z_0} + \tilde{\Phi}_n(z)$$

z を z_0 に近づければ，

$$\Phi'_n(z_0) = \tilde{\Phi}'_{n-1}(z_0) + \tilde{\Phi}_n(z_0) = (n-1)\tilde{\Phi}_n(z_0) + \tilde{\Phi}_n(z_0) = n\tilde{\Phi}_n(z_0) = n\Phi_{n+1}(z_0)$$

そして $\tilde{\Phi}'_n(z_0) = n\tilde{\Phi}_{n+1}(z_0)$ も成り立つ。

開円盤 Δ 上の正則函数 $f(z)$ と Δ 内の区分的に C^1 級である連続な単純閉曲線 C に対し，$z_0 \in \Delta$ が $n(C, z_0) = 1$ とすれば，先のコーシーの積分公式によって

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

ここで，

$$F_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz$$

と置けば，$f(z_0) = F_1(z_0)$，$f'(z_0) = F_1'(z_0) = F_2(z_0)$，$f''(z_0) = F_2'(z_0) = 2F_3(z_0)$，...,

$$f^{(n)}(z_0) = (n-1)! F_n'(z_0) = n! F_{n+1}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

となり導函数も含めたコーシーの積分公式が得られる。

開円盤 Δ 上の正則函数 $f(z)$ は Δ 内の区分的に C^1 級である連続な単純閉曲線 C に沿う積分として $z \in \Delta, n(C, z) = 1$ における導函数の値が表現される。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

これで $f(z)$ は Δ 上何回でも微分できること（無限回微分可能）が分る。

$z_0 \in C$ で C が接線を持つとき，Δ に含まれる z_0 中心の十分小さい円 $V_r = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ をとって ∂V_r と C は唯２点 $z_1(r) = z_0 + re^{i\theta_1(r)}$，$z_2 = z_0 + re^{i\theta_2(r)}$ でのみ交わるようにできる。接線を持つとの仮定から，$\lim_{r\to 0} \theta_2(r) - \theta_1(r) = \pi$ に注意しておこう。C で囲まれた部分から V_r を取り除いた部分を D_r として ∂D_r は $C_r = C - V_r$ と $z_2(r)$ から $z_1(r)$ に向かう円弧 K_r からなるとすれば，コーシーの積分定理によって

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

$$= \frac{f(z_0)}{2\pi} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} (f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0) d\theta$$

により

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2} f(z_0)$$

を得る。この積分は主値積分と呼ばれ

$$p.v. \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

と表される。

5.7 Cauchy の積分定理再考

Ω を領域として G は Ω 内の互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた領域とする。領域 G の周 ∂G に沿って進むとき G が左手に見える方向を ∂G の向きとすることが一般的である。次の **Green** の定理

Ω 内の C^1- 級函数 $P(x,y),\ Q(x,y)$ に対して,

$$\int_{\partial G} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ dxdy$$

を用いれば，Cauchy の積分定理

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0$$

は Ω 内の正則函数 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ に対して，Cauchy-Riemann の偏微分方程式に注意して,

$$\int_{\partial G} f(z)\ dz = \int_{\partial G} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\partial G} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

$$= -\iint_G (\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y))\ dxdy + i\iint_G (-\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y))\ dxdy = 0$$

より得られる。領域 G が Jordan 閉曲線 C_0 に囲まれ $C_1, C_2, ..., C_n$ の外部で表されているとすれば,

$$\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$$

例　$V_0 = \{z; |z| < r\},\ V_1 = \{z; |z-a| < \rho\}$ に対して $|a| < r,\ |a| + \rho < r$ のとき,

$$\int_{\partial V_0} \frac{1}{z-a}dz = \int_{\partial V_1} \frac{1}{z-a}d(z-a) = 2\pi i$$

$|a| > r,\ |a| - \rho > r$ のとき，$\displaystyle\int_{\partial V_0} \frac{1}{z-a}dz = 0$

従って,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z-a}dz = \begin{cases} 1 & |a| < r \\ 0 & |a| > r \end{cases}$$

Cauchy の積分公式

Ω 内の正則函数 $f(z)$ に対して,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ z \in G$$

さて，G 内に円盤 $V_r = \{\zeta; |\zeta - z| \leq r\}$ を繰り抜いてできる $G_r = G - V_r$ において $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は正則だから,

$$0 = \int_{\partial G_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{\partial V_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

従って，

$$\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial V_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial V_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{\partial V_r}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

ここで $0<r<10^{-N(k)}$ のとき $|f(z+re^{i\theta})-f(z)|<10^{-k}$ となることから，

$$\left|\int_{\partial V_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leq\int_0^{2\pi}\frac{|f(z+re^{i\theta})-f(z)|}{r}rd\theta\leq 2\pi 10^{-k}$$

また，

$$\int_{\partial V_r}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z)$$

従って，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)$$

5.8 Morelaの定理

領域 Ω 上の連続函数 $f(z)$ が Ω 内の任意の区分的に C^1 級閉曲線 γ に対して，

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

を満たせば，$f(z)$ は Ω 上の正則函数である。

条件より，$a,\ z\in\Omega$ を結ぶ区分的に C^1 級閉曲線とする積分路のとり方に依らず $F(z)=\int_a^z f(\zeta)d(\zeta)$ が定義され，$F(z)$ は Ω 上複素微分可能従って正則となり，$f(z)=F'(z)$ も正則となる。

これは Cauchy の積分定理の逆命題である。

5.9 最大値の原理

領域 G 上の定数函数でない正則函数の絶対値は領域内部で最大値をとらない。そして，境界まで連続であるとすれば境界上でその最大値をとる。

内点 $z_0\in G$ で最大値をとるとすれば，任意の $z_0\in G$ に対して $|f(z)|\leq|f(z_0)|$ となっている。 中心 z_0 半径 r の円盤 $V_r(z_0)$ が G に含まれているとして，

$$\begin{aligned}|f(z_0)|&\leq\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\zeta-z_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}\right|d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\end{aligned}$$

従って，

$$\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|-|f(z_0)|d\theta\geq 0$$

一方，$|f(z_0+re^{i\theta})|-|f(z_0)|\le 0$ で，これは θ の連続函数だから恒等的に零となることが分る。これより $V_r(z_0)$ 上 $|f(z)|=|f(z_0)|$ となって，集合 $\{z\in G;|f(z)|=|f(z_0)|\}$ は開集合かつ閉集合ともなり，G の連結性より此の集合が G であることが分る。$f(z)=u+iv$ $|f(z)|=c$ とすれば，

$$u^2+v^2=c^2,\ uu_x+vv_x=0,\ uu_y+vv_y=0$$

$c=0$ のときは　$u=0,\ v=0$，$c\neq 0$ のときは Cauchy-Riemann の微分方程式 $u_y=-v_x,\ u_x=v_y$ を用いて上式より $u_x=0, v_x=0$ を得る。G 上 $f'(z)=u_x+iv_x=0$ となって，$f(z)$ は G 上定数になり仮定に矛盾する。有界閉集合上の連続函数は最大値をとることに注意して後半の主張を得る。

5.10　Schwarz の補題

円盤 $V_R=\{z;|z|<R\}$ 上の正則函数 $f(z)$ が $f(0)=0,\ |f(z)|\le M$ を満たすとすれば，$|f(z)|\le \dfrac{M}{R}|z|,\ |f'(0)|\le \dfrac{M}{R}$ で両式の等号が成立のは $f(z)\sim e^{i\theta}\dfrac{M}{R}z$ の場合に限る。

$\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z}$ は V_R 上の正則函数となっている。$0<r<R$ として $\{z;|z|=r\}$ 上 $|\varphi(z)|\le\dfrac{M}{r}$ だから最大値の原理より，V_r 上　$|\varphi(z)|\le\dfrac{M}{r}$ が成立する。$r<R$ は任意に選べるから，$|\varphi(z)|\le\lim_{r\to R}\dfrac{M}{r}=\dfrac{M}{R},\ |f(z)|=|z\varphi(z)|\le\dfrac{M}{R}|z|$ を得る。$|f(z_0)|=\dfrac{M}{R}|z_0|$ とすれば $|\varphi(z_0)|=\dfrac{M}{R}$ で最大値の原理より定数となって結論を得る。逆は明らかである。$f'(0)=\dfrac{M}{R}$ のときは $\varphi(0)=f'(0)=\dfrac{M}{R}$ により結論を得る。

円盤 $V_R=\{z;|z|<R\}$ 上の正則函数 $f(z)$ が $|f(z)|\le M$ を満たし $f(z_0)=w_0$ とする。$V_R,\ V_M$ から単位円盤への函数

$$T(z)=\frac{R(z-z_0)}{R^2-\overline{z_0}z},\ S(w)=\frac{M(w-w_0)}{M^2-\overline{w_0}w}$$

を用いた合成函数 $g(\zeta)=S\circ f\circ T^{-1}(\zeta)$ は，単位円盤上の正則函数で $g(0)=0,\ |g(\zeta)|\le 1$ を満たす。Schwarz の補題によって，

$$|S\circ f\circ T^{-1}(\zeta)|\le|\zeta|,\ |S\circ f(z)|\le|T(z)|\ \text{即}\quad \left|\frac{M(f(z)-w_0)}{M^2-\overline{w_0}f(z)}\right|\le\left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\overline{z_0}z}\right|$$

$R=M=1,\ w=f(z)$ として

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{1}{1-\overline{w_0}w}\frac{w-w_0}{z-z_0}\right|\le\lim_{z\to z_0}\left|\frac{1}{1-\overline{z_0}z}\right|,\ \frac{1}{1-|w_0|^2}|\frac{dw}{dz}|\le\frac{1}{1-|z_0|^2}$$

を得る。これは次のように定義されるポアンカレ計量で計った曲線の長さに関して，C の長さ $\ell(C)$ よりも正則写像による像曲線 $f(C)$ の長さ $\ell(f(C))$ が常に短くなることを示している。

$$\ell(C)=\int_C\frac{|dz|}{1-|z|^2}\ge\int_{f(C)}\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\ell(f(C))$$

5.11 Cauchy の評価式

複素平面内の正則函数 $f(z)$ に対し，$a \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 r の円周上 $|f(z)| \leq M(r)$ とすれば，

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r)$$

Cauchy の積分公式により，

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} r d\theta = \frac{n!}{r^n} M(r)$$

5.12 Liouville の定理

複素平面内の正則函数 $f(z)$ は有界なら定数函数である。

$\mathbb{C}$ 上 $|f(z)| \leq M$ として Cauchy の評価式を用いれば，任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$$

r は任意だから，$f'(a) = 0$ を得，結局 $\mathbb{C}$ 上 $f'(z) \equiv 0$ となり，

$$f(z) = \int_0^z f'(z) dz + f(0) = f(0)$$

は定数函数となる。

5.13 代数学の基本定理

$n(\geq 1)$ 次代数方程式 $P(z) = 0$ は解を持つ。

解を持たないとすれば $\dfrac{1}{P(z)}$ は $\mathbb{C}$ 上正則となる。n 次多項式 $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$，$a_n \neq 0$ とすれば，

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|a_n z^n| (1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z^{n-k}|})} = 0$$

により，$\dfrac{1}{P(z)}$ は $\mathbb{C}$ 上有界となり，Liouville の定理によれば定数函数でなければならないが，これは矛盾である。

解の一つを z_1 として，多項式 $P_1(z) = \dfrac{P(z)}{z - z_1}$ をとり $P_1(z) = 0$ に対してこの定理を適用してその解 z_2 がとれる。このように考えれば結局

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

の形に因数分解できることになる。

第6章　級数展開

級数展開はすべての情報を含むように見える。計算も出来そうに思える。解析の原点かもしれない。

6.1　高階の微分係数

領域 G 内の 1 点 a として $G-\{a\}$ で正則な函数 f が G 上の正則函数 $\tilde{f}$ に拡張される，即 $z \in G-\{a\}$ に対して $\tilde{f}(z) = f(z)$，為の必要十分条件は $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$ である。実際 $\tilde{f}$ は正則だから連続でもあり，$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\tilde{f}(z) = 0$ となる。逆に条件が満たされているとして， a を中心とする円盤 V とその境界 ∂V が G 内に含まれるなら $z \in V$ に対して $\hat{f}(z) = \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ を考えれば，

$$f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial V}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right) = \hat{f}(z)$$

によって $\hat{f}$ は V で正則で $V-\{a\}$ で f に一致する。G 上の正則函数 f に対して $F(z) = \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ は $G-\{a\}$ 上の正則函数で $\lim_{z\to a}(z-a)F(z) = 0$ を満たすから，

$$f_1(z) = \begin{cases} F(z) & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

は G 上の正則函数となる。同様にして，

$$f_{k+1}(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z)-f_k(a)}{z-a} & z \neq a \\ f_k'(a) & z = a \end{cases} \quad k = 1, ..., n-1$$

も G 上の正則函数となる。

$$f_k(z) = f_k(a) + (z-a)f_{k+1}(z)$$

より，

$$f(z) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(z-a)^k f_k(a) + (z-a)^n f_n(z)$$

を得る。これを n 回微分して $f^{(n)}(a) = n!f_n(a)$ を得る。$z \in V$ に対して，

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{f(\zeta)-f(a)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(\zeta-a)^{n-k}(\zeta-z)}d\zeta$$

ここで $z \in V$ を固定して変数を $w \in V$ とする函数

$$g_k(w) = \int_{\partial V} \frac{1}{(\zeta - w)^k (\zeta - z)} d\zeta$$

を考えれば，

$$g_1(w) = \frac{1}{z - w} \int_{\partial V} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} d\zeta = 0$$

従って，$g_{k+1}(w) = \dfrac{1}{k!} g_1^{(k)}(w) = 0$，これより，

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n (\zeta - z)} d\zeta$$

を得る。

6.2 Taylor の定理

G 上の正則函数 f に対して，G 内に含まれる a を中心とする円盤 V とその境界 ∂V をとって，$z \in V$ で，

$$f(z) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k + (z - a)^n f_n(z)$$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n (\zeta - z)} d\zeta$$

の表現を持つ。

$\partial V = \{\zeta; |\zeta - a| = r\}$，$\partial V$ 上 $|f(\zeta)| \leq M$ とすれば，

$$|f_n(z)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n (\zeta - z)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{|f(z)|}{|\zeta - a|^n |\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{Mr}{r^n (r - |z - a|)}$$

$$|(z - a)^n f_n(z)| \leq \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^n \frac{Mr}{r - |z - a|}$$

を得る。$|z - a| < r$ のとき，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{|z - a|}{r} = 0$ となるから f は次のように整級数として表される。

6.3 Taylor 展開

G 上の正則函数 f は，G 内に含まれる a を中心とする円盤 V で次の級数で表すことができる。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$$

これを f の a 回りでの Taylor 展開（級数）という。

ここで，$f^{(k)}(a) = 0,\ k = 0, 1, \ldots$ が満たされるとすれば，f は V 上恒等的に 0 となる。次に，$E_1 = \{z \in G;$ 任意の k に対して $f^{(k)}(z) = 0\}$，$E_2 = \{z \in G;$ ある k に対して $f^{(k)}(z) \neq 0\}$ と置けば，$E_1,\ E_2$ 共に開集合となり $G = E_1 \cup E_2$ で G は連結だから E_1 または E_2 が空集合となる。E_1 は a を含み空集合でないから E_2 が空集合となり，$E_1 = G$ で f は G 上恒等的に 0 となる。

例

$f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ の 0 回りでの Taylor 展開は $f_1(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ となり $V_1 = \{z : |z| < 1\}$ で収束している。$a \in V_1$ 回りでの Taylor 展開は $f_2(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$ となり $V_2 = \{z : |z-a| < |1-a|\}$ で収束している。

6.4 零点の孤立

領域 G 上の定数函数でない正則函数 f に対して G 内の任意の点 a で

$$f^{(n)}(a) \neq 0,\quad f^{(k)}(a) = 0,\ 0 \leq k < n$$

を満たす n がある。このとき，a は f の n 位の零点であるといい，

$$f(z) = (z-a)^n f_n(z)$$

と表され $f_n(z)$ は a のある近傍で 0 をとらない。即ち，f の零点は孤立している。

6.5 一致の定理

領域 G 上の２つの正則函数 f, g が G 内に集積点を持つ集合 E 上でその値を等しくすれば f と g は G 上恒等的に等しい。

$f - g$ が恒等的に零でないとすれば，集積点は零点でしかも孤立していないことで矛盾が生じることに注意すればよい。

6.6 解析接続

領域 G_1 上の正則函数が G_1 と交わる領域 G_2 上の正則函数 f_2 と共通集合 $G_1 \cap G_2$ 上で一致するとき，$(f_2; G_2)$ を $(f_1; G_1)$ の G_2 への解析接続という。G_2 上 f_1，G_2 上 f_2 となっている函数 f は $G_1 \cup G_2$ 上の正則函数である。解析接続により，より広い領域の正則函数に拡張することができる。収束半径 ρ_1 の冪級数 $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_1)^n$ から $z_2(\in V_1 = \{z : |z-z_1| < \rho_1\})$ 回りでの $f_1(z)$ の Taylor 展開 $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ を作る。この収束半径 ρ_2 が $\rho_1 - |z_2 - z_1|$ よりも大きければ $V_2 = \{z : |z-z_2| < \rho_2\}$ は V_1 に含まれず，$(f_2; V_2)$ は $(f_1; V_1)$ の解析接続となっており，$(f_2; V_2)$ を $(f_1; V_1)$ の直接接続という。$(f_2; V_2)$ の直接接続 $(f_3; V_3)$,...,$(f_k; V_k)$ の直接接続 $(f_{k+1}; G_{k+1})$ のようにして直接接続を有限回繰り返して得られる $(f_n; V_n)$

を $(f_1;V_1)$ の間接接続という。$(f_1;V_1)$ の直接，間接接続の全体 $\{(f_\lambda;V_\lambda)\}$ を考え $(f_\lambda;V_\lambda)$ を 1 点とみて，$f_\lambda=f_\mu$, $V_\lambda=V_\mu$ となるとき，$(f_\mu;V_\mu)$ は $(f_\lambda;V_\lambda)$ と同一点とみなすことにする。V_λ の中心を z_λ として点 $(f_\lambda;V_\lambda)$ で値 $f_\lambda(z_\lambda)$ をとる函数を解析函数といい，$f_\lambda(z), z\in V_\lambda$ をその函数要素という。$(f_\lambda;V_\lambda)$ の直接接続 $(f_\nu;V_\nu)$ における値 $f_\nu(z_\nu)$ は $f_\lambda(z_\nu)$ に等しい。

例

6.3 節の例は直接接続の例となっている。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ から解析函数 $\dfrac{1}{1-z}$ が作られたとみることもできる。

6.7 Laurent 展開

円環領域 $A=\{z;R_1<|z-a|<R_2\}$ 上の正則函数 f は，次の級数で表すことができる。

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-a)^k\ ,\ a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta \text{ 但し}, R_1<r<R_2$$

これを f の Laurent 展開（級数）という。

$R_1<R_1'<r<R_2'<R_2$ として，

$$f_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=R_i'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad i=1,\ 2$$

と置けば，Cauchy の積分定理より $\{z;R_1'<|z-a|<R_2'\}$ において $f(z)=f_2(z)-f_1(z)$ と表される。$f_2(z)$ は Cauchy 型積分で表されているから Taylor 展開

$$f_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k, a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=R_2'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta$$

で表される。$z'=\dfrac{1}{z-a}$, $\zeta'=\dfrac{1}{\zeta-a}$ として，$\tilde{f}_1(z')=f_1(\dfrac{1}{z'}+a)=f_1(z)$ として，さらに $\tilde{f}_1(0)=0$ と置けば，$\tilde{f}_1(z')$ は $\{z';|z'|<\frac{1}{R'}\}$ で正則となる。

$$z=\frac{1}{z'}+a,\ \zeta-a=\frac{1}{\zeta'},\ d\zeta=\frac{-1}{\zeta'^2}d\zeta',\ \zeta-z=\frac{\zeta'-z'}{\zeta'z'}$$

に注意して，

$$\tilde{f}_1(z')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_1^{(n)}(0)}{n!}z'^n=f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=R_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta'|=\frac{1}{R_1'}}\frac{z'f(\frac{1}{\zeta'}+a)}{\zeta'(\zeta'-z')}d\zeta'=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta'|=\frac{1}{R_1'}}\frac{z'\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z'}{\zeta'}\right)^n f(\frac{1}{\zeta'}+a)}{\zeta'^2}d\zeta'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta'|=\frac{1}{R_1'}}\frac{f(\frac{1}{\zeta'}+a)}{\zeta'^{n+1}}d\zeta'\right)z'^n$$

これより，

$$\tilde{f}_1^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta'|=\frac{1}{R_1'}}\frac{f(\frac{1}{\zeta'}+a)}{\zeta'^{n+1}}d\zeta'=-\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=R_1'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$$

$$f_1(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-k+1}}d\zeta\right)(z-a)^{-k}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{-k}(z-a)^{-k}$$

従って，

$$f(z)=f_2(z)-f_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-a)^k$$

ローラン展開を求めるには係数の公式に依るよりも等比級数の和を用いる方が一般に容易である。

例

$\dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$ を $\{z;0<|z-1|<1\}$ でローラン展開を求めてみよう。

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)}=\frac{1}{(1-z)(1-(z-1))}=\frac{-1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$=\frac{-1}{(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}-(z-1)^n$$

次に，$\{z;1<|z|<2\}$ でローラン展開を求めてみよう。

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$$

$$=\frac{1}{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}-z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n$$

ここで第 1 項は $|\dfrac{1}{z}|<1$ だから収束し, 第 2 項も $|\dfrac{z}{2}|<1$ だから収束する。

さらに，$\{z;|z|>2\}$ でローラン展開を求めてみよう。

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})}+\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$$

$$=\frac{1}{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)z^{-n}$$

6.8　孤立特異点

函数 $f(z)$ が a のある近傍で a 除いて定義されておりそこで正則となっているとき $z=a$ を $f(z)$ の孤立特異点という。

$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$ となっているとき既に示したように $\lim_{z\to a}f(z)$ が収束しその値で $f(z)$ の a における値 $f(a)$ と定義すれば a でも正則となるので $z=a$ を $f(z)$ の除去可能特異点と呼ぶ。

例

$\mathbb{C}-\{0\}$ 上の函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ に対して $z=0$ は除去可能特異点である。

$\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$ となっているとき $z=a$ を $f(z)$ の極という。 $f(z)$ は a のある近傍で零をとらないから $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ はそこで a を除いて定義されて正則となっている。$\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)g(z)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)}{f(z)}=0$ に注意すれば，$z=a$ は $g(z)$ の除去可能孤立特異点であることがわかる。a 近傍の正則函数 $g_n(z)$ ($g_n(a)\neq 0$ によって $g(z)=(z-a)^n g_n(z)$ と表される。 $g_n(z)$ は a のある近傍で零をとらないからそこで $\dfrac{1}{g_n}$ は正則となりその Taylor 展開を $\sum_{k=0}^{\infty}B_k(z-a)^k$ とすれば，結局，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(z-a)^{k-n}$$

と表される。極 $z=a$ の位数は n 位または $z=a$ は $f(z)$ の n 位の極という。そして

$$\frac{B_0}{(z-a)^n}+\frac{B_1}{(z-a)^{n-1}}+...+\frac{B_{n-1}}{(z-a)}$$

を $z=a$ における f の主要部という。

例

$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ に対して $z=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ は 1 位の極でこの点における主要部は $\dfrac{(-1)^n}{z-n\pi}$ である。

$f(z)$ の孤立特異点 $z=a$ が除去可能特異点でも極でもないとき真性孤立特異点という。

Weierstrass の定理

真性孤立特異点の任意の近傍内で函数は任意の複素数値にいくらでも近づき得る。

$z=a$ を $f(z)$ の真性孤立特異点とし，$z=a$ の任意の近傍 V と任意の複素数 A をとる。$f(V-\{a\})=\{f(z);z\in V-\{a\}\}$ が A と離れているとすれば，ある正数 r があって任意の $z\in V-\{a\}$ に対して $|f(z)-A|>r>0$ となっている。このとき $\left|\dfrac{1}{f(z)-A}\right|<\dfrac{1}{r}$ によって $z=a$ は $\dfrac{1}{f(z)-A}$ の除去可能特異点となってさらに $f(z)$ の極となることになる。これは $z=a$ が真性孤立特異点であることに矛盾する。

例　$z=0$ は $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ の真性孤立特異点であり，$z=0$ の任意の近傍で $f(z)$ は 0, 1 以外のすべての値をとっている。これを確かめることを演習としよう。

第7章　留数

無限遠を付け加えることで平面が球面となる。完全玲瓏の世界。多価函数が住む世界の本来のありどころ。リーマンの構想が眼を開かせた。コーシーの定理が実函数の積分に応用できる。コーシーのねらいの一つだった。

7.1　リーマン面

開集合が定義された位相空間 R において，R の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，（即ち U_α は R の開集合で $\cup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha = R$）と U_α から複素平面内の開集合 G_α への同相写像 φ_α （即ち，全単射で両連続）の族 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，そして $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が次の条件を満たす。$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ から $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ への正則写像である。以上が想定された $R=(R,\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ をリーマン面という。これは R を複素平面内の領域 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ と $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ を $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ で対応する点を一致するように張り合わせてできたものと考えている。リーマン面上では複素平面におけるように微分積分ができ正則函数も定義できる。R の領域 R_1 で定義された函数 f は $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ が $\varphi_\alpha(R_1\cap U_\alpha)$ 上正則となるとき R_1 上正則という。

例　リーマン球面

複素平面 $\mathbb{C}$ と無限遠と呼ぶ点 ∞ を合併した集合を S として $\mathbb{C}$ 内の開集合は S の開集合として ∞ を含む開集合は $\mathbb{C}$ の有界閉集合の補集合に無限遠を合併した集合と定義した位相とする。S の開集合 $U_1=\{\zeta;|\zeta|<2\},\ U_2=\{\zeta;|\zeta|>\frac{1}{2}\}\cup\{\infty\}$，$\mathbb{C}$ の開集合 $G_1=\{z;|z|<2\},\ G_2=\{w;|w|<2\}$ として U_i から G_i への写像 φ_i を

$$z=\varphi_1(\zeta)=\zeta,\ w=\varphi_2(\zeta)=\frac{1}{\zeta},\ 0=\varphi_2(\infty)$$

とする。

$$U_1\cap U_2=\{\zeta;\frac{1}{2}<|\zeta|<2\},\ \varphi_1(U_1\cap U_2)=\{z;\frac{1}{2}<|z|<2\}$$

$$\varphi_2(U_1\cap U_2)=\{w;\frac{1}{2}<|w|<2\}$$

となり， $w=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(z)=\dfrac{1}{z}$ は $\{z;\frac{1}{2}<|z|<2\}$ で，$z=\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}(w)=\dfrac{1}{w}$ は $\{w;\frac{1}{2}<|w|<2\}$ で正則となる。従って，$S=(S,\{U_i\}_{i=1,2},\{\varphi_i\}_{i=1,2},\{G_i\}_{i=1,2})$ はリーマン面である。この S をリーマン球面又は複素球面と呼ぶ。無限遠近傍で定義された函数 f が ∞ で正則となるのは $f\circ\varphi_2^{-1}(w)=f(\frac{1}{w})$ が $w=0$ で正則となるときである。

例　トーラス

複素平面内の長方形 $T=\{\zeta=\xi+i\eta; 0\le\xi\le 1,\ 0\le\eta\le b\}$ の対辺を同一視し，4 頂点も同一視したものを考える。頂点回りの T に含まれる四分円を張り合わせてできる円盤を U_0 ，辺上の点においては対辺上の点と併せてその回りの T に含まれる半円を張り合わせてできる円盤を U_i，内点ではそのまわりの T に含まれる円盤を U_λ としてそれらを複素数平面に置いたところを $G_0,\ G_i,\ G_\lambda$ として重なった点を対応させる写像を $\varphi_0,\ \varphi_i,\ \varphi_\lambda$ とする。 $T=(T,\{U_\alpha\},\{\varphi_\alpha\},\{G_\alpha\})$ はリーマン面となっている。

例　$w=\sqrt{z}$ のリーマン面

複素平面を 2 枚用意し，それぞれの実軸の正の部分に鋏を入れて切りその上半平面の端に当たる所を上岸，下半平面の端に当たる所を下岸と呼ぶことにしよう。それぞれの複素平面の上岸を他方の下岸に張り合わせてできる面 R を考える。3 次元空間の中に置かれた 2 平面でこれを実現することはできないがそうなっていると想定することにしよう。一つの複素平面の上岸 1 の点から出発して単位円周に沿って 0 の回りを回って下岸に達すればそこは張り合わされた他方の複素平面の上岸でもあるからその平面で単位円周に沿って 0 の回りを回って下岸に達すれば，そこは最初の点となっている。今辿った曲線で囲まれた部分を $U_0,\ G_0=\{w; |w|<1\}$ $w=\varphi_0(z)=\sqrt{z}=exp(\frac{1}{2}(log\ |z|+iarg\ z))\ z\neq 0,\ \varphi_0(0)=0$ 一つの複素平面上の点 z の偏角は $[0,2\pi]$ にあるとし，もう一つの複素平面上の点 z の偏角は $[2\pi,4\pi]$ にあると考えることにして，$w=\varphi_0(z)=\sqrt{z}=exp(\frac{1}{2}(log\ |z|+iarg\ z)$ を U_0，から G_0 への写像と見る。上岸の点を中心とする上半円と張り合わされた下岸のその点を中心とする下半円とを併せて U_i とし，そのままそれを複素平面上の円盤と見立てたものを G_i，見立てた点対応を φ_i とする。上記以外の点ではそこを中心とする切られた複素平面内の円盤を U_λ としてそのまま G_λ と見立て，見立てた点対応を φ_λ とする。$R=(R,\{U_\alpha\},\{\varphi_\alpha\},\{G_\alpha\})$ はリーマン面となっている。二価函数 $\sqrt{z}$ は上記の偏角の約束によってこのリーマン面 R 上の一価函数とみなせる。この面で 0 は代数分岐点と呼ばれている。

例　$w=Log\ z$ のリーマン面

各整数 n に実軸の正の部分に鋏を入れて切った複素平面 $\mathbb{C}_n$ を用意し，$w=\sqrt{z}$ のリーマン面と同様に $\mathbb{C}_n$ の下岸を $\mathbb{C}_{n+1}$ の上岸に張り合わせた面を R として $\{U_\alpha\},\{\varphi_\alpha\},\{G_\alpha\}$ も同様に考えてリーマン面となっている。ここで 0 はこの面の点とはしないが対数分岐点と呼ばれている。無限多価函数 $Log\ z$ はこのリーマン面 R 上の一価函数とみなせる。

6.5 節でみた解析函数を定義する領域がリーマン面となっている。実際 $R=\{(f_\lambda,V_\lambda)\}$, $U_\lambda=\{(f_\mu;V_\mu);(f_\mu;V_\mu)$ は $(f_\lambda;V_\lambda)$ の直接接続 $\}$, $G_\lambda=V_\lambda$, $\varphi_\lambda((f_\mu;V_\mu))=z_\mu(V_\mu$ の中心$)$ と考えればよい。上記多価函数のリーマン面は解析函数のリーマン面なのである。

7.2　留数の定義

領域 $\{z; 0<|z-a|<R\}$ で正則な函数 $f(z)$ が a 点回りでローラン展開

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-a)^k$$

を持つとき，$(z-a)^{-1}$ の係数

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r} f(z)dz \ (0 < r < R)$$

を a における $f(z)$ の留数 (residue) と呼んで $Res_a\ f(z)$ と表す。領域 $\{z; |z| > R\}$ で正則な函数 $g(z)$ がローラン展開

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$$

を持つとき，

$$-b_{-1} = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} g(z)dz \ (r > R)$$

を ∞ における $g(z)$ の留数と呼んで $Res_\infty\ g(z)$ と表す。$z = \dfrac{1}{\zeta}$ と変換すれば，積分路の向きを考えて，

$$Res_\infty\ g(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{r}} g(\frac{1}{\zeta})\frac{-1}{\zeta^2}\ d\zeta = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{r}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \zeta^{-k-2}\ d\zeta$$

となることによって符号が変わっていることが納得される。

7.3 留数定理

Ω を領域として G は Ω 内の互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた領域とする。$\Omega - \cup_{k=1}^n \{z_k\}$ で正則な函数 $f(z)$ に対して，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

G に含まれる z_k 中心の円盤 V_k を互いに交わらないようにとれば，$f(z)$ は $G - \cup_{k=1}^n V_k$ で正則となるから，Cauchy の定理によって，

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(G-\cup_{k=1}^n\ V_k)} f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)\ dz - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V_k} f(z)\ dz$$

となって結論を得る。特に，

複素平面から有限個の点 $\cup_{k=1}^n \{z_k\}$ を除いた領域で正則な函数 $f(z)$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f(z) + Res_\infty f(z) = 0$$

が成立する。

すべての z_k が円盤 $\{z; |z| < R\}$ 内に含まれるように R を選べば，

$$\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} f(z)dz = -Res_\infty f(z)$$

となっていることに注意すればよい。

7.4　留数の求め方

$z = a$ が $f(z)$ の 1 位の極の場合,

$$Res_a f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

右辺が収束していれば $z = a$ は $f(z)$ の 1 位の極となっている。a 近傍の正則函数 $f_1(z)$ $(f_1(a) = 0,\ f_1'(a) \neq 0)$, $f_2(z)$ によって $f(z) = \dfrac{f_2(z)}{f_1(z)}$ と表されている場合

$$Res_a f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f_2(z)}{f_1(z)} = \frac{\lim_{z\to a} f_2(z)}{\lim_{z\to a}\frac{f_1(z)-f_1(a)}{z-a}} = \frac{f_2(a)}{f_1'(a)}$$

となって

$$Res_a f(z) = \frac{f_2(a)}{f_1'(a)}$$

a 近傍の正則函数 $g(z)$ によって $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^k}$ と表されている場合 $g(z)$ の Taylar 展開を $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ とすれば, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{(n-k)}$ となるから,

$$Res_a f(z) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

7.5　留数による定積分

2 実変数 $x,\ y$ の有理函数 $R(x,y)$ を考える。単位円周 $\{(x,y); x^2+y^2=1\}$ 上では $R(x,y)$ は有限な値をとるとしておこう。このとき定積分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta$$

は留数によって求められる。$e^{i\theta} = z$ とおけば,

$$d\theta = \frac{-i}{z}dz,\ \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

によって,

$$I = \oint_{|z|=1} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{-i}{z}dz = 2\pi\sum_{|z|<1} Res_z R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{1}{z}$$

$\sum_{|z|<1}$ は当該函数の $\{z; |z| < 1\}$ 内にある極すべてに渡って和をとることを意味する。

例 1

実数 $a, 0 < |a| < 1$ に対して,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\cos\theta}d\theta = \oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\frac{a}{2}(z+\frac{1}{z})}\frac{-i}{z}dz = -2i\oint_{|z|=1}\frac{1}{az^2+2z+a}\ dz$$

$$= 4\pi Res_{z_1}\frac{1}{az^2+2z+a} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

ここで z_1 は２次方程式 $az^2+2z+a=0$　の単位円内にある解としている。

$f(z)$ は上半平面 $\{z=x+iy; y\geq 0\}$ 上有限個の点 $\{z_k\}_{k=1}^n$ を除いて正則で実軸上には特異点はないものとする。正数 $R_0,\ M,\ \delta$ が $|z|>R_0$ に対して $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$ を満たすようにとれると仮定する。このとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty}(\int_{\partial V_R} f(z)\ dz - \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\ d\theta)$$

ここで V_R は原点中心半径 R の上半円周である。仮定より，

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\ d\theta\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{M}{R^{\delta}}\ d\theta = 0$$

十分大きい R をとれば V_R はすべての z_k を含むから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty}(\int_{\partial V_R} f(z)\ dz) = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

例２

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\ dx = \ 2\pi i\left(Res_{e^{\frac{\pi i}{4}}}\frac{1}{z^4+1} + Res_{e^{\frac{3\pi i}{4}}}\frac{1}{z^4+1}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

上半平面 $\{z=x+iy; y\leq 0\}$ 上有限個の点 $\{z_k\}_{k=1}^n$ を除いて正則で実軸上には特異点はないものとする。半径 R の上半円周上の最大値を $M(R)=max_{0\leq\theta\leq\pi}|f(Re^{i\theta})|$ として $\lim_{R\to\infty}M(R)=0$ と仮定する。このとき，a を正数として，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\ dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k}e^{iaz}f(z)$$

先と同様に，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{iax}f(x)\ dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\partial V_R} e^{iaz}f(z)\ dz - \int_0^{\pi} e^{iaRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\ d\theta\right)$$

ここで，

$$\left|\int_0^{\pi} e^{iaRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\ d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-aRsin\ \theta}|f(Re^{i\theta})|R\, d\theta \leq RM(R)\int_0^{\pi} e^{-aRsin\ \theta}\, d\theta$$

$$= 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aRsin\ \theta}\ d\theta \leq 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\theta}\ d\theta = \frac{\pi}{a}M(R)(1-e^{-aR})$$

従って，

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi} e^{iaRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\ d\theta)\right| = 0$$

十分大きい R をとれば V_R はすべての z_k を含むから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\partial V_R} e^{iaz}f(z)\ dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k}e^{iaz}f(z)$$

例 3　$a,\ b$ は正の実数とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\ ax}{x^2+b^2}\ dx = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\ dx\right) = Re\left(2\pi i Res_{ib}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\right) = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$$

次に，上記と同様に適当な領域をとってその境界積分路上の評価をすることに依り得られる結果をいくつか記しておこう。

複素球面上有限個の孤立特異点 $\{z_n\}_{k=1}^{n}$ を除いて正則な函数 $f(z)$ は無限遠点で 1 位以上の零を持ち，零は除去可能特異点であるとする。$0<\alpha<1$ として，

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k}z^{\alpha-1}f(z)$$

例 4

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}Res_{-1}\frac{z^{\alpha-1}}{z+1} = \frac{2\pi i e^{\pi(\alpha-1)i}}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

複素球面上有限個の孤立特異点 $\{z_n\}_{k=1}^{n}$ を除いて正則な函数 $f(z)$ は零，1，無限遠点は除去可能特異点であるとし，$\lim_{z\to\infty}f(z)=a_0,\ 0<\alpha<1$ として，

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)dx = \frac{\pi a_0}{\sin\alpha\pi} + \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k}z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}f(z)$$

例 5

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

上半平面上有限個の孤立特異点 $\{z_n\}_{k=1}^{n}$ を除いて正則な函数 $f(z)$ が $|f(z)| \le \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ $(M>0,\ \delta>0)$ を満たし，$f(x)$ は偶函数とする。

$$\int_0^{\infty} f(x)\log x dx = \pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k}f(z)(\log z - \frac{i\pi}{2})$$

例 6

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx = \pi i Res_i\frac{1}{(1+z^2)^2}(\log z - \frac{i\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4}$$

7.6　偏角の原理

領域 Ω 内で孤立特異点を除いて正則な函数でその特異点はすべて極となっている函数を Ω 上有理型という。 Ω で有理型である函数 f に対して $F(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ と置く。

$z=a$ が $f(z)$ の m 位の零点であるとき，$f(z)=(z-a)^m g(z)$ と表せば，$g(z)$ は a の近傍で正則で零をとらない。

$$f'(z)=m(z-a)^{m-1}g(z)+(z-a)^m g'(z) \text{ より } F(z)=\frac{m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

従って，$Res_a F(z)=m$

$z=b$ が $f(z)$ の n 位の極であるとき，$f(z)=(z-b)^{-n}h(z)$ と表せば，$h(z)$ は b の近傍で正則で零をとらない。

$$f'(z)=-n(z-b)^{-n-1}h(z)+(z-b)^{-n}h'(z) \text{ より } F(z)=\frac{-n}{z-b}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

従って，$Res_b F(z)=-n$

G を Ω 内の互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた領域とし $f(z)$ は境界 ∂G 上に極も零もないものとする。$f(z)$ の G 内にあるすべての零点の位数の和を $n_G(0,f)$ で表し， G 内にあるすべての極の位数の和を $n_G(\infty,f)$ で表す。留数定理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{z\in G}Res_z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

だから上記の結果より次の定理を得る。

定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=n_G(0,f)-n_G(\infty,f)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}arg\ f(z)$$

境界 ∂G 上で f は零をとらないことに注意して ∂G 上に中心を持ち $f(z)$ の零は含まないような円盤達で ∂G を被覆すればその内の有限個の円盤 $\{V_k\}_{k=1}^n$ で ∂G を被覆できる。各円盤 V_k 内で $\log f(z)$ は 1 価な分枝 $\log|f(z)|+iarg\ f(z)$ をとるとしてよい。 V_k 内に含まれる G の境界曲線に沿って ζ_ℓ から $\zeta_{\ell+1}$ まで線積分すれば，

$$\int_{\zeta_\ell}^{\zeta_{\ell+1}}\frac{f'(z)}{f(z)}=\log|f(\zeta_{\ell+1})|+iarg\ f(\zeta_{\ell+1})-(\log|f(\zeta_\ell)|+iarg\ f(\zeta_\ell))$$

$\zeta_0\in\partial G$ から線積分することとして $\{\zeta_\ell\}_{\ell=0}^n$ が積分路に沿って順次上記の状態になっているとしてよい。このとき，

$$\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum\{\log|f(\zeta_{\ell+1})|-\log|f(\zeta_\ell)|+i(arg\ f(\zeta_{\ell+1})-arg\ f(\zeta_\ell))\}$$

となり， ∂G 上 $\log|z|$ は 1 価で積分路の始点と終点が一致していることに注意すれば，実部が消えて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi}\sum(arg\ f(\zeta_{\ell+1})-arg\ f(\zeta_\ell))$$

を得る。この右辺を $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} arg\ f(z)$ と表している。
$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し， $n_G(0, f-\alpha) = n_G(\alpha, f)$ と表せば，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz = n_G(\alpha, f) - n_G(\infty, f)$$

7.7 Rouché の定理

領域 Ω 上の有理型函数 $f,\ g$ に対し， G を Ω 内の互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた領域とし $f(z),\ g(z)$ は境界 ∂G 上に極も零もなく境界上で $|f(z)| > |g(z)|$ が満たされているものとする。 このとき，

$$n_G(0, f) - n_G(\infty, f) = n_G(0, f+g) - n_G(\infty, f+g)$$

$h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)} + 1$ による境界 ∂G の像は中心 1 半径 1 の開円盤に含まれ零の回りを巡ることはない。 そこで $\Delta_{\partial G} arg\ h(z) = 0$ となるから

$$\Delta_{\partial G} arg\ (f(z)+g(z)) = \Delta_{\partial G} arg f(z) + \Delta_{\partial G} arg(\frac{g(z)}{f(z)}+1) = \Delta_{\partial G} arg f(z)$$

により偏角の原理から結論を得る。
例
7 次方程式 $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ のすべての解は $\{z; 1 < |z| < 2\}$ 内にある。
$f(z) = 12,\ g(z) = z^7 - 5z^3$ とすれば，単位円周上，

$$|f(z)| = 12 > 6 \geq |z^7| + 5|z^3| \geq |z^7 - 5z^3| = |g(z)|$$

だから，単位円盤 V_1 で Rouché の定理を用いれば，$n_{V_1}(0, f+g) = n_{V_1}(0, f)$ となって，$f(z) = 12$ は単位円盤内に零をもたないから，$f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ も単位円盤内に零をもたない。 次に，$f(z) = z^7,\ g(z) = 12 - 5z^3$ として，零中心半径 2 の円盤 V_2 で考えれば，∂V_2 上，

$$|f(z)| = 2^7 = 128 > 52 = 12 + 5\times 2^3 = |12| + 5|z^3| \geq |12 - 5z^3| = |g(z)|$$

$f(z) = z^7$ は V_2 内で零においてのみ 7 位の零をもち $n_{V_2}(0, f) = 7$ となって，$f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ も V_2 内に 7 個の零をもつ。7 次方程式の解は 7 個であるから結論を得る。

第8章　演習

「演習問題を出して下さいとの学生の声が強くてね」と先生方が苦笑されていた時があり，今は「講義を演習問題の解法に当てて下さい」との声が強い時代となった。少し演習問題を提供しておこう。世の問題の正解は定かでなく，自分で納得する答えを与え，その果を見，結果の責任は自分でとる他ない。

複素数

[1]　次の角度のラジアンによる値を求めよ。

(1) $0°$, (2) $30°$, (3) $45°$, (4) $60°$, (5) $90°$, (6) $120°$, (7) $135°$, (8) $180°$, (9) $210°$, (10) $225°$, (11) $270°$, (12) $300°$, (13) $315°$, (14) $360°$, (15) $390°$, (16) $720°$

[2]　次の複素数の絶対値，偏角，共役複素数を求めよ。

(1) 1, (2) $\sqrt{3}-1$, (3) $1+i$, (4) $5i$, (5) $-3\sqrt{3}-3i$, (6) $2-2i$

[3]　次の複素数の値を求めよ。

(1) $(1+2i)^3$, (2) $\dfrac{5}{-3+4i}$, (3) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$, (4) $(1+i)^n+(1-i)^n$

[4]　$z=x+iy$, (x, y は実数) として次の複素数の実部，虚部を求めよ。

(1) z^4, (2) $\dfrac{1}{z}$, (3) $\dfrac{z-1}{z+1}$, (4) $\dfrac{1}{z^2}$

[5]　次の複素数の絶対値，偏角を求めよ。

(1) $-2i(1+i)(\sqrt{6}+\sqrt{2}-i(\sqrt{6}-\sqrt{2}))^2$, (2) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)(-1+i)}{(-1-i)(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}))}$

[6]　$A=\sqrt{3}+i$, $z=2-2i$ として次の複素数を複素数平面に図示せよ。

(1) $A+z$, (2) Az, (3) $\dfrac{1}{z}$, (4) $\dfrac{A}{z}$, (5) $\bar{A}$, (6) $\bar{z}$, (7) $\bar{A}+\bar{z}$, (8) $\bar{A}\bar{z}$, (9) $\dfrac{\bar{A}}{\bar{z}}$

[7]　次の図形を複素数平面上に図示せよ。

(1) $\{z:\ |z-4-3i|=5\}$, (2) $\{z:\ (\sqrt{3}-i)(z-1-i)=(\sqrt{3}+i)(\bar{z}-1+i)\}$

[8]　次の等式または不等式をみたす点 z の全図を複素数平面上に図示せよ。

(1) $\{z:\ Re(iz)\geq 2\}$, (2) $\{z:\ |z+i|=|z-i|\}$, (3) $\{z:\ |z-1|<2|z-2|\}$

複素函数

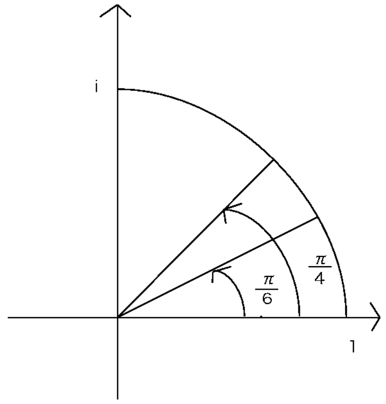

図1

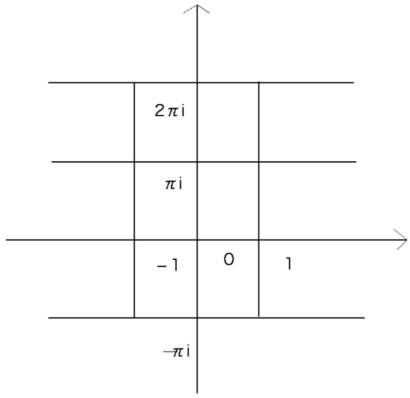

図2

[1]　図１の $w = f(z)$ による像を複素（$w = u + iv$) 平面に描け。

$$f(z) = z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^{\frac{1}{2}},\ z^{\frac{1}{3}},\ (1+i)z + 3,\ \frac{1}{z},\ \bar{z},\ \bar{z}^2,\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

[2]　$w = f(z) = \dfrac{z-i}{z+i},\ g(w) = \dfrac{w-\sqrt{3}}{w+i}$ に対して，合成関数 $g \circ f(z)$ を求めよ。

[3]　図１の $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ による像を描く為に，図１の像を $z_1 = -z,\ z_2 = 1 + z_1,$ $z_3 = \dfrac{1}{z_2},\ z_4 = 2z_3,\ w = z_4 - 1$ によって，$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ w$ 平面に描け。

[4]　図２の $w = e^z$ による像を w 平面上に描け。

[5]　$w = \sin z$ のグラフを合成写像 $z_1 = iz,\ z_2 = -e^{z_1},\ z_3 = -iz_2, w = \dfrac{1}{2}\left(z_3 + \dfrac{1}{z_3}\right)$ を用いて視覚化せよ。

[6]　計算せよ。

(1) $e^{-\frac{\pi}{2}i},\ e^{\frac{3\pi}{4}i},\ e^{\frac{2\pi}{3}i},$ (2)$\sqrt{i},\ \sqrt{-i},\ \sqrt{1+i},\ \sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}},$ (3) $\sqrt[4]{-1},\ \sqrt[4]{i},\ \sqrt[4]{-i},$

(4) $Log\, i, Log\,(1+i),\ Log\,(-1),$ (5) $\sin i,\ \cos i,\ \tan(1+i),$ (6) $\sinh i,\ \cosh i,\ \tanh i,$

(7) $2^i,\ i^i,\ (-1)^{2i},$ (8) $Sin^{-1}(\sqrt{3}+i),\ Cos^{-1}(\sqrt{3}+i)$

[7]　次方程式の解をすべて求めよ。

(1) $e^z = -1 - i,$ (2) $\sin z = 2,$ (3) $\cos z = \sqrt{3}$

複素函数の微分

［1］ 次の函数の導函数求めよ。

(1) $z+z^3$, (2) $\dfrac{1+z}{1-z}$, (3) $(\cos(2z+1))^2$, (4) $(z-i)^{4z+3}$, (5) $\cos^{-1}(z-1)$, (6) $z^{\log z}$

［2］ $w=w(z)$ が w^3-3。$z^2w+4\log z=0$ を満たすとき，$\dfrac{dw}{dz}$ を求めよ。

［3］ $f(x+iy)=\sqrt{|xy|}$ は 0 においてコーシー・リーマンの微分方程式を満足するが，0 で微分可能でないことを示せ。

［4］ $f(z)=|z^2|$ は $z=0$ で微分可能であるが，そこでは正則でないことを示せ。

［5］ $f(z)$ は正則函数で $f'(z)\neq 0$ とする。

$$\Delta\log\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

を計算せよ。

［6］ 次の関数 $u(x,y)$ が調和であることを確かめ，u の共役調和函数を求めよ。

(1) $u(x,y)=x^3-3xy^2$, (2) $u(x,y)=e^x\cos y$, (3) $u(x,y)=(e^{-y}-e^y)\sin x$

［7］ 正則函数 $f(z)$ は $f(0)=3-2i$ で $Im\ f'(x+iy)=6x(2y-1)$ であるという。$f(1+i)$ の値を求めよ。

［8］ $f(z)=z^2$ による直線 $x=a(\neq 0)$, $x=b(\neq 0)$ の像を求め，それらが互いに直交していることを確かめよ。

複素函数の積分

［1］ 次の線積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_\gamma x dz \quad \gamma = \{z = (1+i)t \ :\ 0 \le t \le 1\},$

(2) $\displaystyle\int_\gamma y dz \quad \gamma = \{z = (1-\cos t) + i\sin t \ :\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\},$

(3) $\displaystyle\int_\gamma z dz \quad \gamma = \{z = \begin{cases} t & :\ 0 \le t \le 1 \\ 1 + i(t-1) & :\ 1 \le t \le 2 \end{cases}\},$

(4) $\displaystyle\int_\gamma z dz \quad \gamma = \{z = e^{it} \ :\ 0 \le t \le 2\pi\},$

(5) $\displaystyle\int_\gamma |z-1||dz| \quad \gamma = \{z = e^{it} \ :\ 0 \le t \le 2\pi\},$

(6) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \quad \gamma = \{z = e^{it} \ :\ 0 \le t \le 2\pi\},$

(7) $\displaystyle\int_\gamma e^{-2z} dz$ 　γ は $1 - i\pi$ から $2 + 3\pi i$ へ向かう線分 ,

(8) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz \quad \gamma = \{z = Re^{it} \ :\ 0 \le t \le \pi\},$

［2］ コーシーの積分公式を用いて次の線積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^3} dz,$ (2) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz,$ (3) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z)^2}{(z-1)(z-2)} dz$

［3］ 線積分を計算せよ。

線積分 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} dz$ を計算して，さらに $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} d\theta$ を求めよ。

［4］ $f(z)$ が $\{z \ :\ |z| < 1\}$ で正則で $\displaystyle |f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$ ならば,

$$|f^{(n)}(0)| < (n+1)!e$$

となることを証明せよ。

テイラー級数，特異点，ローラン級数

[1] 次の函数をそれぞれ指定された点の回りでテイラー級数に展開せよ。

(1) $\dfrac{1}{z}$, $(z=1)$, (2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $(z=\dfrac{1}{2})$, (3) $\dfrac{\sin z}{z^2+1}$, $(z=0)$,

(4) $\dfrac{z}{e^z+1}$, $(z=0)$, (5) $\log z$, $(z=1-i)$

[2] $z=0$ は次の関数のどのような特異点か。極の場合はその位数を求めよ。

(1) $\dfrac{z}{e^z-1}$, (2) $\dfrac{\cos z}{\sin z}$, (3) $e^{\frac{1}{z}}$, (4) $\dfrac{1-\cos z}{z}$, (5) $\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$

[3] 次の函数の $z=0$ における零の位数はいくらか。

(1) $z^2(\cos z-1)$, (2) $6\sin z^2+z^2(z^4-6)$

[4] 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ を次の円環内で，ローラン級数に展開せよ。

(1) $0<|z-1|<2$, (2) $1<|z-1|<\infty$, (3) $1<|z-1-i|<\sqrt{5}$

[5] 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})}$ の $z=0$ におけるローラン展開 $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k z^k$ の係数は

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(k\theta-\sin\theta)d\theta$$

で与えられることを示せ。

[6] 複素数 α に対して $f(z)=(1+z)^\alpha$ の任意の分枝を $z=0$ でテイラー展開して得られる級数の収束半径を求めよ。

[7] 微分方程式 $f'(z)=1+zf(z)$, $f(0)=0$ を満足する函数の $z=0$ におけるテイラー級数の収束半径を求めよ。

[8] 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ は $\{z\ :\ |z|<e\}$ において 0 以外のすべての値を無限回とることを確かめよ。

留数，定積分，偏角の原理

［1］ 次の函数の極を求め，その極の位数と極における留数を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$, (2) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$, (3) $\dfrac{1}{\sin z}$, (4) $\cot z$, (5) $\dfrac{1}{(\sin)^2}$, (6) $\dfrac{1}{z^m(1-z)^n}$

［2］ 次の函数の極 $z=0$ における位数と留数を求めよ。

(1) $\cot z$, (2) $(z)^2\log(1-z)$, (3) $\dfrac{z}{\sin z-\tan z}$

［3］ 次の関数の与えられた領域内での留数の総和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{|z|<1} Res\frac{z}{\sin z}$, (2) $\displaystyle\sum_{|z|>1} Res z^2 e^{\frac{1}{z}}$, (3) $\displaystyle\sum_{|z|<2} Res\frac{e^{2z^4}}{z^2(z-i)^3}$, (4) $\displaystyle\sum_{Imz>0} Res\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$

［4］ 留数を用いて次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{(\sin\theta)^2+1}d\theta$, (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+6}dx$, (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$,

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}dx$, (5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$, (6) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\sin\theta}d\theta$, (7) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx$,

(8) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\log x}}{x^2+1}dx$, (9) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)dx$, (10) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$

［5］ 次の方程式の与えられた領域内での解の個数を求めよ。

(1) $z^7-2z^5+6z^3-z+1 \quad \{z\ :\ |z|<1\}$,

(2) $z^4-6z+3 \quad \{z\ :\ 1<|z|<2\}$,

(3) $z^4+8z^3+3z^2+8z+3=0 \quad \{z\ :\ Re\ z>0\}$

(4) $z^4+z^3+1=0 \quad \{z=x+iy\ :\ x>0,\ y>0\}$

(5) $e^z=2z^n \quad \{z\ :\ |z|<1\}$

［6］ 多項式 $P(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$, $(|z_1|\le|z_2|\le\ldots\le|z_m|<r<|z_{m+1}|\le\ldots\le|z_n|)$

に対して，

$$\oint_{|z|=r} z\frac{P'(z)}{P(z)}dz$$

を求めよ。

力試し

注意．問題の不鮮明な所，不適切な点があると判断した者は，その点を指摘し，
各自の判断による前提を明記の上解答せよ。

［1］ 次の複素数の実部，虚部，絶対値，偏角，共役複素数を求めよ。

(i) $\dfrac{1-2i}{2+i}+\dfrac{2+i}{3-i}$, (ii) $(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{18}$, (iii) $(i)^{\pi}$

［2］ 次の条件を満たす点の集合を複素平面上に図示せよ。

(i) $\{z : \left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| \leq 2\ |\}$, (ii) $\{(x+iy)^2 : x \leq 1,\ y \leq 1\}$

［3］ 次の方程式の解を求めよ。

(i) $e^{z^2}+1=0$, (ii) $\sin\ z=\cosh 3$

［4］ 関数 $u=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ が原点を除く領域で調和函数となることを確かめ，
u の共役調和函数 v を求めよ。

［5］ 複素関数 $f(z)=\dfrac{2}{z^3+z^2-2z}$ について次の各問に答えよ。

(i) $f(z)$ の極をすべて求めよ。

(ii) $f(z)$ を $\{z;0 \leq |z| \leq 1\}$, $\{z;1 \leq |z| \leq 2\}$, $\{z;2 \leq |z|\}$ でローラン展開せよ。

(iii) 複素平面上，中心 i，半径 2 の円周 C に沿った反時計回りの複素積分
$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

［6］ 次の定積分を計算せよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+(\cos\theta)}d\theta$, (iii) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-i)^4}dz$

［7］ 次の方程式の領域 D 内での解の個数を求めよ。

$z^8-4z^5+z^2-1=0 \quad D=\{z : |z|<1\}$

［8］ 数理解析に関する自習時間数, 講義についての注文, 感想を記せ。

第９章　初心に帰って　大学における学びについて

高校までの教育はひな鳥が餌を受け取るようなもの，大学の教育は餌を自ら取りに行く方法と意義を掴むためのものであります。この意識改革が大事です。

さて，根本からはじめる。これが大学における基本的な姿勢です。

大学は単位制に基づいて運営されていることはご存知でしょう。大学卒業のために単位をとることに関心が深いものと思います。単位とは何かそこから始めましょう。

国が定める大学設置基準に次の規程があります。

(単位)

第二十一条　各授業科目の単位数は、大学において定めるものとする。

２　前項の単位数を定めるに当たつては、一単位の授業科目を四十五時間の学修を必要とする内容をもつて構成することを標準とし、授業の方法に応じ、当該授業による教育効果、授業時間外に必要な学修等を考慮して、次の基準により単位数を計算するものとする。

一　講義及び演習については、十五時間から三十時間までの範囲で大学が定める時間の授業をもつて一単位とする。

二　実験、実習及び実技については、三十時間から四十五時間までの範囲で大学が定める時間の授業をもつて一単位とする。ただし、芸術等の分野における個人指導による実技の授業については、大学が定める時間の授業をもつて一単位とすることができる。

三　一の授業科目について、講義、演習、実験、実習又は実技のうち二以上の方法の併用により行う場合については、その組み合わせに応じ、前二号に規定する基準を考慮して大学が定める時間の授業をもつて一単位とする。

３　前項の規定にかかわらず、卒業論文、卒業研究、卒業制作等の授業科目については、これらの学修の成果を評価して単位を授与することが適切と認められる場合

には、これらに必要な学修等を考慮して、単位数を定めることができる。

(昭四五文令二一・全改、平三文令二四・旧第二十五条繰上・一部改正、平一九文科令二二・一部改正)

(一年間の授業期間)

第二十二条　一年間の授業を行う期間は、定期試験等の期間を含め、三十五週にわたることを原則とする。(平三文令二四・旧第二十七条繰上・一部改正)

(各授業科目の授業期間)

第二十三条　各授業科目の授業は、十週又は十五週にわたる期間を単位として行うものとする。ただし、教育上特別の必要があると認められる場合は、これらの期間より短い特定の期間において授業を行うことができる。

　まず，以上のことをはっきり認識して欲しい。大学設置基準に定める２単位分は９０時間の修学で習得されるものとされており，講義はその内３０時間分それに見合った科学技術習得に必要な事項を提供するよう準備しています。そして，教科書を読んだり，図書館で他の書籍を調べたりして３０時間分予習し，演習問題に取り組んで３０時間分復習されることを想定しているのです。高度に発達した科学技術に対応する為に学ぶべきことは多く，講義内容も多くなりがちで板書も多く進度も早くゆったりした講義をする余裕がないのが現状となっています。分からないときは即座に質問して下さい。一人はしっかり聞いて内容を理解し，一人はノートをしっかりとって友達と協力して習得する方法があります。教科書はよく読んでどこに何が書いてあるか俯瞰できるようにしておこう。講義と自然に結びつく筈であります。高校，予備校で問題を解く為の演習中心の授業を経験してきたと思いますが，大学の講義ではそのようなことは期待しないで下さい。演習には多大の時間を必要とし結果として講義内容を薄めることになりますから，演習は諸君自身の取り組みに委ねる他ありません。講義内容の理解に努力する事が最大の演習でもあるのです。単に問題を解く事を目的とする高校までの学習法から切り替えることが必要であります。

釈迦の最後の旅路での教え（自燈明，法燈明の垂訓）
汝らはただ自らを燈明とし，自らを依拠として，他人を依拠とせず，
法を燈明とし，法を依拠として，他を依拠とすることなくして住するがよい。

自分の行動は自分の判断によるものであり，自分でした事によって生じた結果についての責任は自分が負うものであることをしっかり自覚しなければなりません。先生の教えにも教科書にも間違いがあります。自分で納得できなければ信じてはなりません。発見発明はそこに生まれ，過去の常識の間違いに気付き改めることで社会は大いに進んできました。大学で学ぶべきことは物事（自然，社会等）のしくみでありしくみの理解法であります。個々の問題演習の解法はしくみが分かれば自然に解けるものです。

道元の著書正法眼蔵現成公按項に
自己を運びて万法を修証するを迷いとす，
万法進みて自己を修証するはさとりなり。

自分を利するためにいろいろ力を尽くすことも姿勢において違えているのです。正しいやり方ではありません。いろいろ経験し学ぶことが日常であり自分の力が高まって行くことが大事です。単位をとるために手だてを尽くすことは考えが転倒しているのです。物事の仕組みを理解して行けば問題は自然に解けるようになり自分の力が実証され単位もとれているということが本来の姿です。

孔子の論語巻頭学而編に
学んで時に習う，亦説ばしからずや。
有朋，遠きより方び来たる，亦楽しからずや。
人知らずして慍らず，亦君子ならずや。

物事の仕組みを教わって，演習問題を解くためいろいろと試みることが面白くまた解ければ嬉しくもなります。遠くからきた友達と語らい遊ぶことは楽しい。学んだことを友達と談議する事も理解をすすめ談議そのものが愉快でもあります。たとえ自分のなにかを認め評価してくれることがなかったとしても，自分の力を蓄え自分に自信を持ち心穏やかに過ごしていけばよいのです。それが大人の姿勢というものです。