

## 熱流動を伴う非圧縮性流れ解析に対するシームレス仮想境界法\*

西田 秀利\*<sup>1</sup>, 田尻 恭平\*<sup>2</sup>Seamless Virtual Boundary Method for Incompressible Flow Simulation  
with Heat TransferHidetoshi NISHIDA \*<sup>3</sup> and Kyohei TAJIRI<sup>\*3</sup> Division of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,  
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

In this paper, the seamless virtual boundary method is applied to the incompressible flow analysis with heat transfer. In the seamless virtual boundary method, the forcing term is added not only on the grid points near the boundary but also on the grid points inside the boundary, in order to satisfy the velocity conditions on the virtual boundary points. Then, the smooth physical quantities can be obtained. For the heat transfer, the forcing term satisfied the temperature condition has to be added to the energy equation. First, we validate the present approach for the natural convection in square cavity. The results show that the present solutions are in good agreement with reference solution. Next, we try to apply the present approach to the flow around a heated circular cylinder. Then it is concluded that the present seamless virtual boundary method is applicable to the incompressible flow analysis with heat transfer successfully.

**Key Words:** Computational Fluid Dynamics, Computational Method, Heat Transfer, Natural Convection

## 1. 結 言

現在, 計算流体力学(CFD)はコンピュータの発展と相まって工学の設計ツールとしても恒常的に用いられている。このようなCFDの成熟によって, より複雑な流れ解析及びマルチフィジックス等へのCFDの応用がより強く期待されている。

複雑流れの解析においては一般に流路等の境界に適合する境界適合座標系(BFC)が採用される。しかしながら, 境界が複雑過ぎる, あるいは, 流路内に多数の物体が存在するような場合には境界適合座標を形成するために要する時間が実際の解析に要する時間よりも多大になるケースも想定される。そこで, 座標形成にほとんど時間を要しないデカルト座標系において複雑流れを解析する試み<sup>(1)(2)</sup>が盛んに行われている。特に, 埋め込み境界法(Immersed Boundary Method)<sup>(4)</sup>は現在最も広範に採用されているデカルト格子アプローチであろうと思われる。著者らは埋め込み境界法の一つである仮想境界法(Virtual Boundary Method)<sup>(3)(5)(6)(8)</sup>を当初より採用し, それに改良を加えたシームレス仮想

境界法(Seamless Virtual Boundary Method)<sup>(9)</sup>を提案し, 移動境界問題に対しても有効に機能することを明らかにしている<sup>(10)</sup>。

仮想境界法は仮想境界上の速度条件(静止境界では速度0, 移動境界では移動速度)を満足するように運動方程式に外力項を付加することにより達成される。通常, 外力項は仮想境界直近の格子点のみに付加されるが, この場合, 非物理的な圧力振動が発生することがあり, そのために仮想境界上の物理量評価に無視できない誤差が含まれてしまう。一方, シームレス仮想境界法においては外力項を仮想境界直近の格子点のみならず仮想境界内部の格子点に対しても付加することによって非物理的な圧力振動を除去することに成功している。

本論文では, 熱流動を伴う非圧縮性流れ解析に対してシームレス仮想境界法を適用することを試みる。熱流動はエネルギー方程式によって記述されるため, 最初にエネルギー方程式に対する付加熱量項の評価法を提案し, 次に, 等温及び断熱の両境界条件を有する正方キャビティ内自然対流問題に対してシームレス仮想境界法の有効性の検証を実施した後, 加熱円柱まわりの流れに対して適用し, 他者の数値解と比較検討した結果を報告する。

\* 原稿受付 2009年10月9日。

<sup>\*1</sup> 京都工芸繊維大学大学院工学科学研究科機械システム工学部門(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。<sup>\*2</sup> 京都工芸繊維大学大学院工学科学研究科機械システム工学部門。

E-mail: nishida@kit.ac.jp

## 2. シームレス仮想境界法

**2.1 基礎方程式** 熱流動を伴う非圧縮性粘性流れは以下に示す連続の式, 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式及び温度に関するエネルギー方程式により記述される.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + G_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{Pr \cdot Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + Q. \quad (3)$$

これらの方程式は代表長さ  $L_0$ , 代表速度  $U_0$ , 代表密度  $\rho_0$ , 代表温度  $T_0$ , 代表温度差  $\Delta T_0$ , 動粘性係数  $\nu_0$ , 温度伝導率  $\alpha_0$  により無次元化されており,  $Re (= L_0 U_0 / \nu_0)$  はレイノルズ数,  $Pr (= \nu_0 / \alpha_0)$  はプラントル数である. また, 運動方程式(2)及びエネルギー方程式(3)中の  $G_i$  及び  $Q$  はシームレス仮想境界法における外力項及び付加熱量項を示している.

**2.2 外力及び付加熱量項評価法** 外力項の評価にはフィードバック外力評価法<sup>(3)(5)</sup>及び直接外力評価法<sup>(6)</sup>が提案されているが, 過去の著者らの研究<sup>(9)</sup>を踏まえ直接外力評価法を採用する.

最初に, 通常の仮想境界法の直接外力評価法について説明する. 図1に示すように仮想境界点直近の格子点における速度を  $\bar{U}$  とするとき, 隣接した格子点及び仮想境界点における速度  $u_{i+1}$ ,  $U$  を用いて  $\bar{U}$  を線形補間により評価する. その後, 次時間段階において  $\bar{U}^{n+1}$  が達成されるように外力項  $G_i$  を決定する. 例えば, 運動方程式を前進オイラー法で時間積分する場合,  $x_1$  方向の外力項  $G_1^n$  は次のように求めることができる.

$$G_1^n = u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\bar{U}^{n+1} - u^n}{\Delta t}. \quad (4)$$

他の方向についても同様である. ここで, 仮想境界点における速度は静止している場合は  $U = 0$  であり, 移動している場合には  $U = V_{move}$  によって規定される. ただし,  $V_{move}$  は仮想境界点の移動速度である.

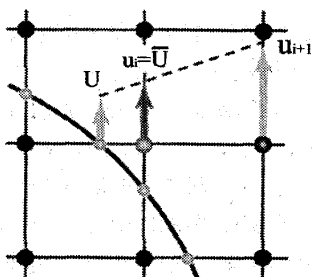


Fig. 1 Direct forcing estimation.

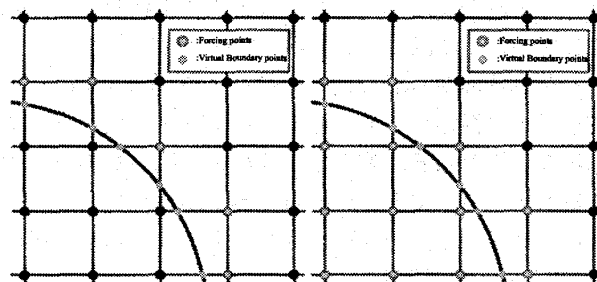
次に, エネルギー方程式(3)に対する付加熱量  $Q$  の評価に関して説明する. 代表的な温度境界条件としては等温条件及び断熱条件が挙げられる. 等温条件の場合, 速度と同様の手順で付加熱量  $Q$  は以下のように決定することができる. 仮想境界点直近の格子点における温度  $\bar{T}$  を線形補間により評価し, エネルギー方程式(3)を用いることにより, 付加熱量は

$$Q^n = u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{1}{Pr \cdot Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\bar{T}^{n+1} - T^n}{\Delta t}. \quad (5)$$

と求められる. 断熱条件の場合 ( $\partial T / \partial n = 0$ ), 法線方向 ( $n$ ) の温度を格子点の温度から補間することによって求め, その法線方向温度を用いて  $\partial T / \partial n = 0$  の関係から仮想境界点上の温度  $T_{vb}$  を算出する. 以降は等温条件と同じ手順で最終的に式(5)により付加熱量  $Q$  を決定することができる.

**2.3 シームレス仮想境界法** 通常の仮想境界法においては外力項及び付加熱量項は仮想境界点直近の格子点にのみ付加される. しかしながら, この場合, 仮想境界近傍の圧力分布に非物理的な振動が発生することがあるために, 仮想境界上の物理量を正確に算出することが困難となる. そこで, 仮想境界近傍の圧力振動を除去するために著者らはシームレス仮想境界法を提案し, その有効性を実証している<sup>(9)(10)</sup>. シームレス仮想境界法においては運動方程式における外力項  $G_i$  を仮想境界直近の格子点のみならず仮想境界内部の格子点に対しても付加する. 仮想境界内部の格子点に対する外力は式(4)において  $\bar{U}^{n+1}$  を境界において規定された速度  $V_{vb}$  ( $V_{vb} = 0$  あるいは  $V_{vb} = V_{move}$ ) に置き換えることによって求めることができる.

図2は両手法における外力を付加する格子点の相違を示している. さらに, 実際に円柱まわりの定常流れ ( $Re = 40$ ) に適用した結果を図3に示す. シームレス仮想境界法の結果は仮想境界点近傍での圧力分布に関して滑らかに接続されており, 明らかな改善が認められる.



(a) Usual direct forcing. (b) Seamless forcing.

Fig. 2 Grid points added forcing term.

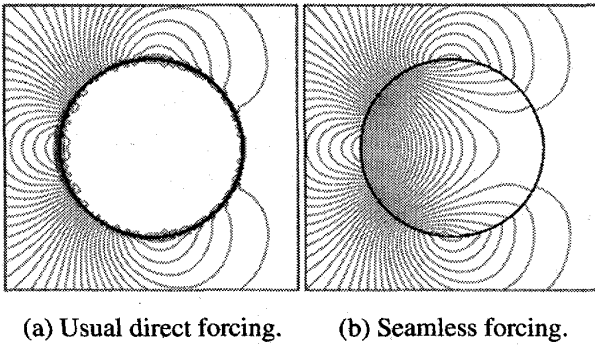


Fig. 3 Comparison of pressure field.

エネルギー方程式に対しても同様に、等温条件の場合は仮想境界内部温度が  $T_{vb}$  を満足するように付加熱量項  $Q$  を決定する。また、断熱条件の場合は  $\partial T/\partial n = 0$  の条件を仮想境界内部直近の格子点に適用することにより  $Q$  を決定することとする。

**2.4 数値計算法** 格子系としてはコロケーション格子を採用し、運動方程式はフラクショナルステップ法により時間積分される。定常問題に対しては前進オイラー法を適用し、非定常問題に対しては3準位1段階ルンゲ・クッタ法<sup>(11)</sup>を採用することにより2次精度を確保する。3準位1段階ルンゲ・クッタ法は以下のように記述される。

$$u_i^{n+1} = (1 - \gamma)u_i^n + \gamma u_i^{n-1} + \Delta t (\alpha F_i^n + \beta F_i^{n-1}) \quad (6)$$

ここで、 $F_i$  は運動方程式中の空間微分項(圧力項, 対流項, 拡散項)を表し、 $\Delta t$  は時間刻み幅である。また、係数  $\alpha, \beta, \gamma$  は2次精度の設定、 $\alpha = 9/8, \beta = -7/8, \gamma = -3/4$  を採用している。エネルギー方程式の時間積分に関しても同様である。ただし、3準位1段階ルンゲ・クッタ法を適用した場合、シームレス仮想境界法における外力項及び付加熱量項評価は3準位1段階ルンゲ・クッタ法を用いたものに変更される。

空間微分項の離散化に関しては、対流項に対して2次精度保存性差分法<sup>(7)</sup>を圧力項及び拡散項に対して2次精度中心差分法を適用する。また、圧力方程式はSOR法を用いて収束解を得るものとする。

### 3. 正方キャビティ内自然対流問題における検証

正方キャビティ内自然対流を解析するに際し、ブシネ近似により浮力項を評価するため非圧縮性ナビエ・ストークス方程式(2)は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \delta_{i2} \frac{Gr}{Re^2} T + G_i \quad (7)$$

ここで、 $Gr (= g_0 \beta_0 \Delta T_0 L_0^3 / \nu_0^2)$  はグラスホフ数であり、 $g_0$  は重力加速度、 $\beta_0$  は体積膨張係数である。ま

た、レーリー数  $Ra$  は  $Ra = Gr \cdot Pr$  で定義される。この問題では、代表速度として  $U_0 = \sqrt{g_0 \beta_0 \Delta T_0 L_0}$  と設定するため、 $Re = \sqrt{Gr}$  となる。

計算領域の概略を図4に示す。初期は静止等温状態 ( $u = v = 0, p = 1, T = 0$ ) とし、境界条件としてキャビティ壁面で速度はすべり無し ( $u = v = 0$ )、圧力は壁面に対する法線方向の運動方程式より評価されるノイマン条件を課す。また、エネルギー方程式に対しては、高温壁(左壁)は  $T_h = 1$ 、低温壁(右壁)は  $T_c = 0$  の等温条件を、断熱壁(上下壁)は  $\partial T/\partial n = 0$  の断熱条件を課す。

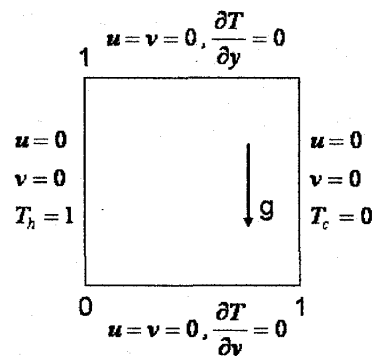


Fig. 4 Natural convection in square cavity.

**3.1 等温条件に対する検証** エネルギー方程式に対するシームレス仮想境界法の検証として、等温条件での付加熱量項  $Q$  の妥当性についての検討を行う。図4における左右壁を図5のように延長し、通常の正方キャビティ壁を仮想境界と仮定し、仮想境界及び仮想境界内部を等温壁とした場合を考える。この場合、仮想境界と格子点は一致しておらず、仮想境界及び境界内部の条件は速度に関してすべり無し ( $u = v = 0$ )、温度に関して  $T = T_h$  (高温壁)、 $T = T_c$  (低温壁) であり、これらの条件より外力項及び付加熱量項を決定する。ただし、計算領域の左右境界は等温壁、上下境界は断熱壁と仮定している。これらは次節の検証においても同様である。

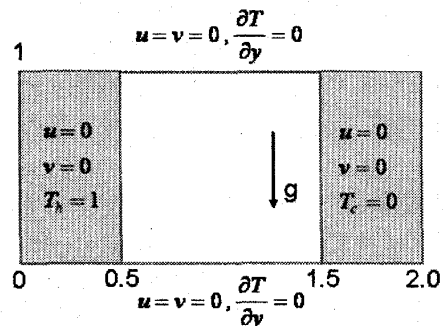


Fig. 5 Isothermal virtual boundary.

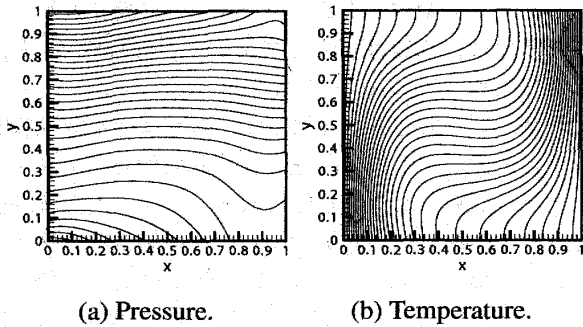


Fig. 6 Usual pressure and temperature fields ( $Ra = 1.0 \times 10^4$ ).

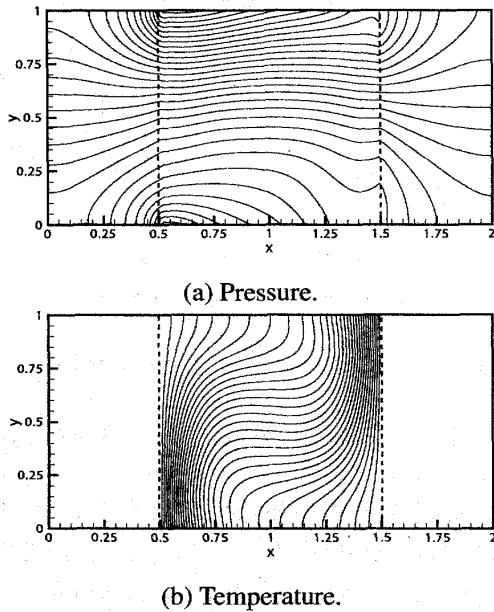


Fig. 7 Isothermal seamless virtual boundary solution.

計算格子は格子点数  $128 \times 64$  (正方キャビティの分解能は  $64 \times 64$ ) の等間隔デカルト格子を用いている。 $Ra = 1.0 \times 10^4$  とした場合の圧力及び温度分布を正方キャビティの結果と比較して図 6, 7 に示す。シームレス仮想境界法を適用した結果 (図 7) において、破線は仮想境界を示している。圧力に関しては仮想境界近傍で滑らかな分布が得られており、温度に関しては仮想境界内部において分布を持たず等温に保たれていることが確認できる。また、通常の正方キャビティ内においてはほぼ一致した分布が得られていることが認められる。

**3.2 断熱条件に対する検証** ここでは前節と同様に、図 8 に示すように上下壁を延長し、通常の正方キャビティ壁 (断熱壁) を仮想境界と仮定した場合について検討を行う。格子分解能は  $64 \times 128$  である。

図 9 に  $Ra = 1.0 \times 10^4$  とした際に得られた圧力場及び温度場を示す。図 6 の通常の正方キャビティの数値

解と比較すると、圧力場及び温度場共に良好に一致していることが認められる。また、仮想境界近傍の圧力分布は滑らかに接続されており、非物理的な振動の発生は認められない。さらに、温度分布において断熱条件  $\partial T / \partial y = 0$  が仮想境界及び境界内部において満たされていることも確認できる。

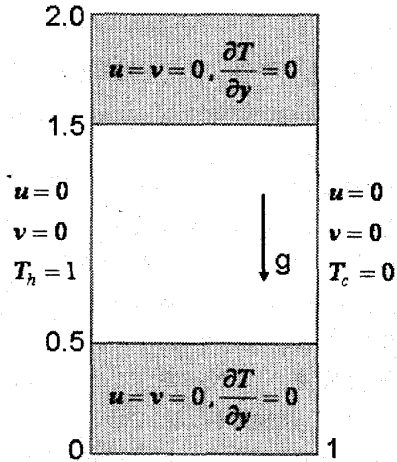


Fig. 8 Adiabatic virtual boundary.

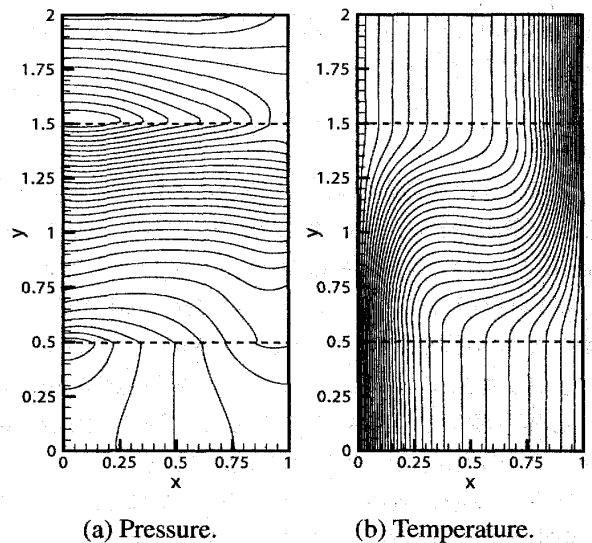


Fig. 9 Adiabatic seamless virtual boundary solution.

**3.3 定量比較** 定量比較としてキャビティ中心線上及び高温壁上の平均ヌッセルト数  $\overline{Nu}$  を他者の結果と共に表 1 に示す。ただし、平均ヌッセルト数  $\overline{Nu}$  は以下のように定義される。

$$\overline{Nu}(x) = \int_0^1 \left( -\frac{\partial T}{\partial x} + uT \right) dy \quad (8)$$

表中  $\overline{Nu}_{cl}$  及び  $\overline{Nu}_h$  は各々キャビティ中心線上及び高温壁上の平均ヌッセルト数を示している。通常の正方キャビティの結果と比較すると断熱条件で約 1% の誤

差を含むものの良好な一致を示していると認められ、他者の結果に対しても妥当な結果を示している。なお、レイリー数を変化させた場合に対しても定性的及び定量的に信頼に足る結果を得ていることを付記する。

Table 1 Comparison of averaged Nusselt number.

	$\overline{Nu}_{cl}$	$\overline{Nu}_h$
Usual	2.251	2.288
Isothermal	2.247	2.298
Adiabatic	2.228	2.330
de Vahl Davis <sup>(12)</sup>	2.243	2.238
le Quere et al. <sup>(13)</sup>	2.245	2.245

#### 4. 加熱円柱まわりの流れへの適用

ここでは、図 10 に示すような計算領域を確保し(円柱直径を  $D$  とする)、加熱円柱まわりの流れに対してシームレス仮想境界法の妥当性を検討する。ただし、浮力を考慮しないため運動方程式は式 (2) により与えられる。

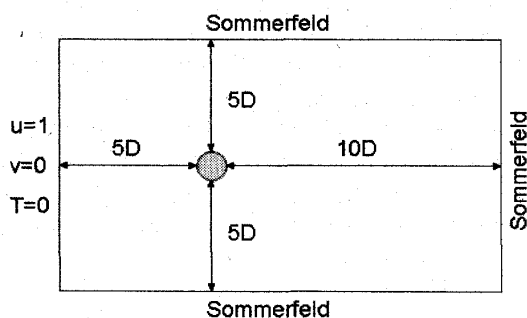
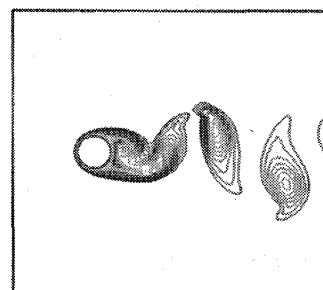


Fig. 10 Computational domain.

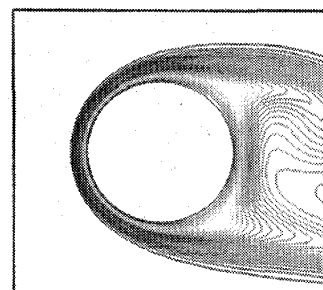
初期条件は一様流 ( $u = 1, v = 0, p = 1, T = 0$ ) 中に突然加熱円柱が現れたと考える衝撃出発とする。流入境界においては速度、温度は一様流に固定し、圧力はノイマン条件で与える。側方境界及び流出境界においては速度、温度は線形外挿で評価し、圧力はゾンマーフェルト放射条件<sup>(14)</sup>により与える。円柱境界は仮想境界で表現し、すべり無し速度条件 ( $u = v = 0$ ) 及び等温条件 ( $T = 1$ ) を仮想境界及び境界内部に課す。また、計算格子は格子点数  $343 \times 303$ 、最小格子幅  $0.005D$  の不等間隔直交格子(円柱近傍は円柱直径を 200 等分割した正方格子)とする。プラントル数を  $Pr = 0.717$  とし、レイノルズ数は定常である  $Re = 40$  から非定常となる  $Re = 218$  まで変化させてシミュレーションを実施した。

図 11 にレイノルズ数  $Re = 200$  の非定常流れに対する瞬時温度場を示す。加熱円柱後方に明確なカルマン

渦が形成されていることが認められ、熱(温度)が渦によって下流に伝わる様子が再現されている。また、加熱円柱近傍の分布においては円柱内部に分布が見られず、等温条件 ( $T = 1$ ) が満足されていることから、シームレス仮想境界法における付加熱量項  $Q$  の評価が妥当であることが確認される。さらに、図 12 に  $Re = 218$  における円柱表面上の時間平均局所ヌッセルト数分布を他者の結果<sup>(15)~(18)</sup>と共に示す。ここで、時間平均は 10 周期時間の平均を取っている。他者の結果と良好に一致していることが判る。また、図 13 にレイノルズ数と平均ヌッセルト数との関係を示す。他者の計算結果、特に、Xi らの結果<sup>(16)</sup>と非常に良く一致していることが認められる。



(a) Temperature contours.



(b) Close-up view.

Fig. 11 Snap shot of temperature field ( $Re = 200$ ).

#### 5. 結 言

本論文においては境界近傍で滑らかな圧力場が得られるシームレス仮想境界法を採用し、熱流動を記述するエネルギー方程式に対して適用する際に必要となる付加熱量項  $Q$  の評価方法を代表的な等温条件及び断熱条件に対して提案し、正方キャビティ内自然対流及び加熱円柱まわりの流れに対して他者の結果と比較を行うことによりシームレス仮想境界法の熱流動を伴う非圧縮性流れ解析への適用可能性について検討を行った。その結果、採用した検定問題では他者の結果等と良好に一致することが確認された。ただし、断熱条件に関

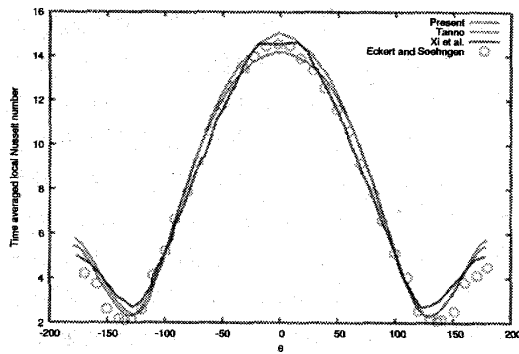


Fig. 12 Time averaged local Nusselt number ( $Re = 218$ ).

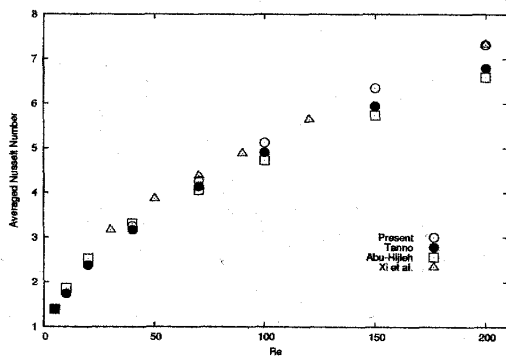


Fig. 13 Relation between  $Re$  and  $\overline{Nu}$ .

しては曲率を有する境界へ適用する必要があると考えており、今後実施予定であることを付記する。以上のことより、シームレス仮想境界法は熱流動を伴う非圧縮性流れ解析に対して充分実用に供しうる計算手法であることが結論される。最後に、本報が CFD のマルチフィジックスへの適用の可能性を拡大する一助となれば幸いである。

## 文 献

- (1) Ye, T., Mittal, R., Udaykumar, H.S., and Shyy, W., An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.156, (1999), pp.209–240.
- (2) Nakahashi, K., Building-cube method for flow problems with broadband characteristic length, *Computational Fluid Dynamics 2002*(Springer), (2003), pp.77–81.
- (3) Saiki, E.M. and Biringen, S., Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method, *Journal of Computational Physics*, Vol.123, (1996), pp.450–465.
- (4) Peskin, C.S. and McQueen, D.M., A three-dimensional computational method for blood flow in the heart. I. immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid, *Journal of Computational Physics*, Vol.81, (1989), pp.372–405.
- (5) Goldstein, D., Handler, R., and Sirovich, L., Modeling a no-slip flow boundary with an external force field, *Journal of Computational Physics*, Vol.105, (1993), pp.354–366.
- (6) Fadlun, E.A., Verzicco, R., Orlandi, P., and Mohd-Yosof, J., Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol.161, (2000), pp.35–60.
- (7) Morinishi, Y., Lund, T.S., Vasilyev, O.V., and Moin, P., Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.143, (1998), pp.90–124.
- (8) Nishida, H., Cartesian grid approach with virtual boundary method and its applications, *Notes on Numerical Fluid Mechanics* (Springer), (2001), pp.17–32.
- (9) Nishida, H. and Sasao, K., Incompressible flow simulations using virtual boundary method with new direct forcing terms estimation, *Proceedings of International Conference on Computational Fluid Dynamics 2006* (Springer), (2006), pp.185–186.
- (10) Nishida, H. and Tajiri, K., Numerical simulation of incompressible flows around a fish model at low Reynolds number using seamless virtual boundary method, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.4, No.3, (2009), pp.500–511.
- (11) Renaut, R.A., Two-step Runge-Kutta method and hyperbolic partial differential equation, *Mathematics of Computation*, Vol.55, No.192, (1990), pp.563–579.
- (12) de Vahl Davis, G., Natural convection of air in a square cavity. A benchmark solution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.3, (1983), pp.249–264.
- (13) le Quere, P. and Rouqufort, T.A., Computation of natural convection in two-dimensional cavities with Chebyshev polynomials, *Journal of Computational Physics*, Vol.57, (1985), pp.210–228.
- (14) Kawakami, K., Nishida, H., and Satofuka, N., An open boundary condition for the numerical analysis of unsteady incompressible flow using the vorticity-streamfunction formulation, *Transaction of the JSME, Series B*, Vol.60, No.574, (1994), pp.1891–1896, (in Japanese).
- (15) Tanno, I., Morinishi, K., Matsuno, K., and Nishida, H., Validation of virtual flux method for forced convection flows, *Transaction of the JSME, Series B*, Vol.72, No.714, (2006), pp.217–224, (in Japanese).
- (16) Xi, G., Torikoshi, K., Kawabata, K., and Suzuki, K., Numerical analysis of unsteady flow and heat transfer around bodies using a compound grid system, *Transaction of the JSME, Series B*, Vol.61, No.585, (2006), pp.1796–1803, (in Japanese).
- (17) Eckert, E.R.G. and Soehngen, E., Distribution of heat-transfer coefficients around circular cylinders in crossflow at Reynolds numbers from 20 to 500, *Transaction of the ASME*, Vol.74, (1952), pp.343–347.
- (18) Abu-Hijleh, B.A./K., Enhanced forced convection heat transfer from a cylinder using permeable fins, *Transaction of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol.125, (2003), pp.804–811.