

圧縮性流れに対する三次元重畳・解適合格子法*

山川勝史^{*1}, 松野謙一^{*2}, 里深信行^{*2}Three-Dimensional Overset Adaptive-Grid Method
for Compressible Flows

Masashi YAMAKAWA, Kenichi MATSUNO and Nobuyuki SATOFUKA

A solution adaptive-grid method for three dimensional space is developed for compressible flows in this study. The present adaptive-grid method, proposed by one of the authors, uses a system of elliptic equations whose source terms, known as the control function, are associated with the weight functions of the flow derivatives. The adaptive grid method has been successfully applied to one- and two dimensional flow problems with two major improvements: the use of a modified flow property for the weight function and the introduction of a new overset adaptive-grid technique. In the present paper, we extend the method to three dimensions and demonstrate its applicability to three-dimensional supersonic flows with shock waves. First, the formulations for three dimensions are described and then the method is successfully applied to supersonic shock shock interactions. Next, the overset-grid concept is combined with the adaptive-grid method in three dimensions. The present three-dimensional overset adaptive-grid method is applied to the supersonic flow through a duct with compression ramps. It is shown that the present method is promising for compressible flow problems, particularly shocked flows.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Grid Generation, Three dimensional Flow, Compressible Flow, Solution-Adaptive Grid, Overset Grid

1. 序 論

コンピュータの発達に伴い計算流体力学は大きく進歩してきたが、まだ数多くの課題を抱えているのが現状である。その中でも格子形成には、極端な場合作業時間の9割以上も費やされることがあり、これがこの分野での大きな問題点の一つである。

格子形成を行ううえで、格子点数あるいは格子密度は計算機の容量、計算時間、計算精度に直接影響を与える。よって、いかに少ない格子点数で高精度な計算格子の形成を行うかということが論点になってくる。そこでこれらの問題の解決策の一つとして解適合格子法がある。

解適合格子法とは、流れ場の計算と連動させて衝撃波などの流れの変化の激しいところに自動的に格子点を集中して計算精度を改善する方法である。特に、構造格子に対し用いられる格子点を移動させる方法は、格子点数および格子トポロジーに変更がないため、容易にかつ優れた格子の形成を行える。

解適合格子形成にはさまざまな方法が提案されているが、文献(1)に、格子の操作方法としてThompson⁽²⁾らによって発展させられた楕円型方程式を用いる方法が記されている。この方法は楕円型格子形成法のもつ格子位置の制御を行う制御関数に、解適合の機能を付加させたものである。これが本論文で用いた楕円型解適合格子形成法である。この方法は文献(1)においては一次元から三次元の仮想的な物理量分布に対し、文献(3)、(4)においては一次元から二次元の流れ場に対してそれぞれ解適合格子形成を行っている。しかし、実際に最も工学的に重要かつ格子形成の困難な三次元流れ場への適用はまだまだ行われていない。

本論文の目的は実際に三次元流れ場に対しこの楕円型解適合格子法の適用を行い、さらに重畳格子法と組合せた方法を提案し、三次元重畳・解適合格子法を確立することである。特に、衝撃波に注目し、それを鋭く捕らえることに主眼をおいて解適合格子を形成する。本論文では、文献(4)において著者らが提案し、二次元に対しその有効性を示した二つの新しい方法を採用する。一つは、真の物理量分布を修正した擬似分布を用いて格子位置の制御を司る重み関数を評価する方法、もう一つは、多次元問題において生ずる解適合

* 原稿受付 1996年7月1日。

*¹ 京都工芸繊維大学大学院 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。*² 正員、京都工芸繊維大学工学部。

格子の斜交性の改善およびより効果的な格子分布の制御を行うため、解適合格子法に重畳格子法を組合せる方法である。本論文ではそれらの方法を三次元に拡張する。まず、三次元解適合格子形成法の定式化を示し、次に重畳格子法と組合せる。

2. 解適合格子形成法

2.1 楕円型解適合格子形成法 解適合格子の規準として流れの s 方向の物理量の変化を含む重み関数 w に対し、格子間隔 Δs との積が一定となるように次式を用いた。

$$w\Delta s = \text{const.} \dots\dots\dots (1)$$

計算面 ξ に対応させると、上式は $w\Delta s/\Delta\xi = \text{const.}$ であり、微分方程式表示すると、

$$ws_\xi = \text{const.} \dots\dots\dots (2)$$

となる。右辺の定数を消去するため ξ で微分すると

$$s_{\xi\xi} + (w_\xi/w)s_\xi = 0 \dots\dots\dots (3)$$

を得る。

一方、滑らかな格子を形成するため楕円型方程式として Thomas ら⁽⁵⁾ により発展させられたポアソン方程式を用いる方法がある。その一次元形を次式に示す。

$$\xi_{ss} = \phi(\xi)\xi_s^2 \dots\dots\dots (4)$$

本論文では、式(4)で表される楕円型方程式を対象とする。

独立変数と従属変数の役割を交換すると

$$s_{\xi\xi} + \phi s_\xi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

を得る。式(3)、(5)の比較により制御関数 ϕ は、

$$\phi = \frac{w_\xi}{w} \dots\dots\dots (6)$$

として、重み関数に関連づけられる。

重み関数として、ここではある物理量 f の一階導関数 f_s を用いて、

$$w = \sqrt{1 + b(f_s)^2} \dots\dots\dots (7)$$

と表す。係数 b は通常、ユーザ指定の任意定数である。本論文では隣り合う格子間隔比の最大許容値 K をユーザ指定のパラメータとし、

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\Delta s_i}{\Delta s_{i-1}} \leq K, \quad (\Delta s_i = s_{i+1} - s_i) \dots\dots\dots (8)$$

のように決めてやる。ただし添字 i は格子番号である。定数 b は式(8)を満足するように自動的に決定される。すなわち b は次式より計算される⁽²⁾。

$$b_i = \left[4 \frac{K-1}{K+1} \right] / \left[\left| \{(f_s)^2\}_\xi \right| - 4 \frac{K-1}{K+1} (f_s)^2 \right]_i \dots\dots\dots (9)$$

$$b = \min(b_1, b_2, \dots, b_{i_{\max}}) \dots\dots\dots (10)$$

2.2 三次元楕円型解適合格子形成法 三次元の楕円型解適合格子法では三方向の格子の制御を同時に行うため式(11)に示すポアソン方程式を用いた。

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} &= \phi(\xi, \eta, \zeta)(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} &= \psi(\xi, \eta, \zeta)(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \\ \zeta_{xx} + \zeta_{yy} + \zeta_{zz} &= \omega(\xi, \eta, \zeta)(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2) \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)の独立変数と従属変数の役割を交換して書き換えると以下ようになる。ここで係数 $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu$ はメトリックの複合関数で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_\xi) + \beta(x_{\eta\eta} + \psi x_\eta) + \gamma(x_{\zeta\zeta} + \omega x_\zeta) \\ + 2\kappa x_{\xi\eta} + 2\lambda x_{\eta\zeta} + 2\mu x_{\xi\zeta} &= 0 \\ \alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_\xi) + \beta(y_{\eta\eta} + \psi y_\eta) + \gamma(y_{\zeta\zeta} + \omega y_\zeta) \\ + 2\kappa y_{\xi\eta} + 2\lambda y_{\eta\zeta} + 2\mu y_{\xi\zeta} &= 0 \\ \alpha(z_{\xi\xi} + \phi z_\xi) + \beta(z_{\eta\eta} + \psi z_\eta) + \gamma(z_{\zeta\zeta} + \omega z_\zeta) \\ + 2\kappa z_{\xi\eta} + 2\lambda z_{\eta\zeta} + 2\mu z_{\xi\zeta} &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

式(12)が本論文で用いる三次元楕円型方程式であり、この式により格子の形成を行うことにする。

三次元格子の形成については格子線が曲線となるため s, s', s'' をそれぞれ ξ, η, ζ 方向の弧長(arc-length)として式(2)を次のように書き換え一次的に取扱う。

$$\begin{aligned} ws_\xi &= \text{const.} \\ w's'_\eta &= \text{const.} \\ w''s''_\zeta &= \text{const.} \\ \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \\ \left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 \\ \left(\frac{ds''}{d\zeta}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

このように格子間の距離と重み関数の積が一定となるように重み関数 w, w', w'' を ξ, η, ζ 方向それぞれ独立に決定し、それを用いて制御関数 ϕ, ψ, ω を評価する。

2.3 解適合を行うための制御関数 解適合格子とは物理量の変化に応じて格子が形成されるわけであるが、本論文では物理量の分布をそのまま用いず、なまらせてつくった擬似分布を用いる。この方法は著者が文献(4)により有効性を示したものである。よって三次元格子形成においても本方法を用いた。

擬似分布 \tilde{f} の構成は、もとの物理量 f を用いて以下の式(14)によって行う。

$$\tilde{f}_{i,j,k} = \phi f_{i,j,k} + \frac{1-\phi}{N} \sum_{p=1}^N f_p \quad 0 \leq \phi \leq 1 \dots\dots\dots (14)$$

ここで f_p は、格子点 (i, j, k) の周りに位置する N 個の格子点のうち、 p 番めの格子点における物理量を表

し、 ϕ はユーザ指定の任意のパラメータである。

制御関数の決定における重み関数の構成においては擬似分布の一階導関数のみを用いても十分効果が見られたので、演算量の削減もふまえて ξ 方向には w 、 η 方向には w' 、 ζ 方向には w'' のそれぞれの重み関数を次のようにそれぞれ格子ラインに沿って構成する。

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{1 + b(\bar{f}_s)} \\ w' &= \sqrt{1 + b'(\bar{f}_{s'})} \\ w'' &= \sqrt{1 + b''(\bar{f}_{s''})} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

よって制御関数 ϕ 、 ψ 、 ω は式よりそれぞれ次のように決定される。

$$\phi = \frac{w_\xi}{w} \quad \psi = \frac{w'_\eta}{w'} \quad \omega = \frac{w''_\zeta}{w''} \dots \dots \dots (16)$$

2.4 格子形成 実際に三次元楕円型解適合格子形成の数値計算を行うため、式(12)を解くわけであるが、非線形であるため線緩和法(Line Relaxation)を用いる。ここで x 成分については ξ 方向、 y 成分については η 方向、 z 成分については ζ 方向についてそれぞれラインとして解く。なお解適合格子形成においては解くべきラインの両側が同じ時間段階であるほうが好ましいため1ラインヤコビ法を適用する。

式(12)に1ラインヤコビ法を適用すると、例えば x 成分について以下ようになる。

$$\begin{aligned} &\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \phi \right) \delta x_{i+1,j,k} - 2(\alpha + \beta + \gamma) \delta x_{i,j,k} \\ &+ \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \phi \right) \delta x_{i-1,j,k} = -R x_{i,j,k}^n \\ x_{i,j,k}^{n+1} &= x_{i,j,k}^n + \Omega \delta x_{i,j,k} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ここで添字 i, j, k は格子点番号を添字 n は時間段階を示す。 $R x_{i,j,k}^n$ は式の左辺を中心差分を用いて離散化したものであり、 Ω は緩和係数である。制御関数 ϕ, ψ, ω は以下の節で述べる。なお三次元では、境界の辺(12辺)を一次的に、境界の面(6面)を二次的に、内点を三次元的に形成し、それぞれ辺→面→内点の順番で解く。

3. 三次元ダクト内流れへの適用

3.1 流れ場の計算条件 楕円型解適合格子法を図1に示すような傾斜15°で絞られているダクト内を超音速(流入マッハ数=2.7)で流入する三次元圧縮性流れ場へ適用した。ダクトの形状が y 方向、 z 方向に対称であるため、全体の4分の1のみを計算領域(図1の実線部分)とした。

流れの計算方法として、空間項には三次精度MUSCL法⁽⁶⁾を組合せたRoeの流束差分離(FDS)法⁽⁷⁾を用いたセル中心有限体積法⁽⁸⁾を、時間積分には

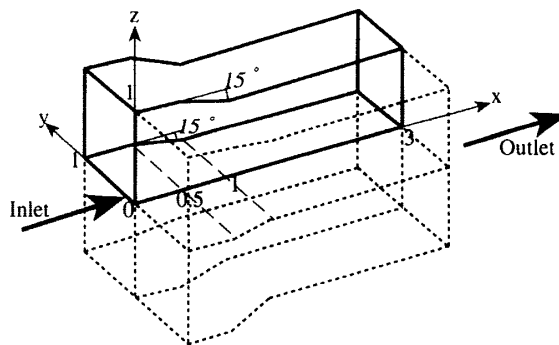


Fig. 1 Three dimensional duct with compression ramp

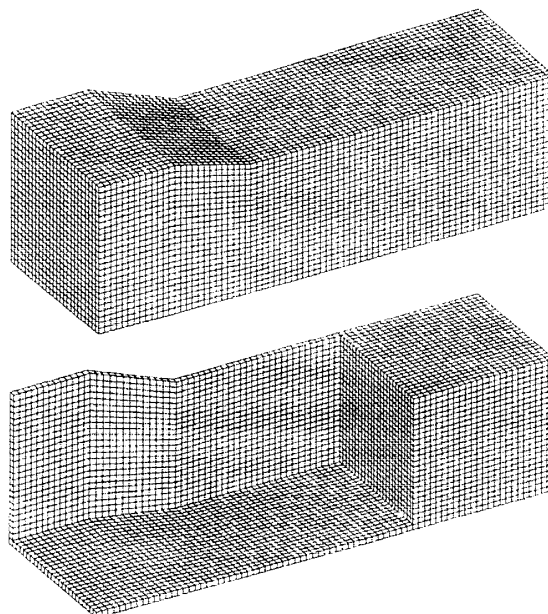


Fig. 2 Initial (non-adapted) grid

陰的時間積分法(Beam-Warming法⁽⁹⁾)を用いた。

3.2 格子形成の条件 初期格子として図2に示すような x, y, z 方向にそれぞれ等間隔に配置したものを使用し、 i 方向に79点、 j 方向に26点、 k 方向に26点を配置した。

三次元においては境界の辺→境界の面→内点の順で格子の形成を行う。まず境界の辺について、格子形成方程式(17)の緩和係数 Ω を0.08とし、一次元楕円型方程式を解くことにより格子の形成を行う。ここで、格子点の必要となる角の部分(例えば i 方向における $x=0.5$ 点)については、格子形成方程式を解き格子の移動を行った後もしその位置に格子点が存在しない場合には、最も近傍に位置する格子点を角の部分に移動させた。なお、境界の辺についてのみ重み関数の構成における物理量に対するスムージングを行っていない。これは、セル中心で評価された物理量を格子点上

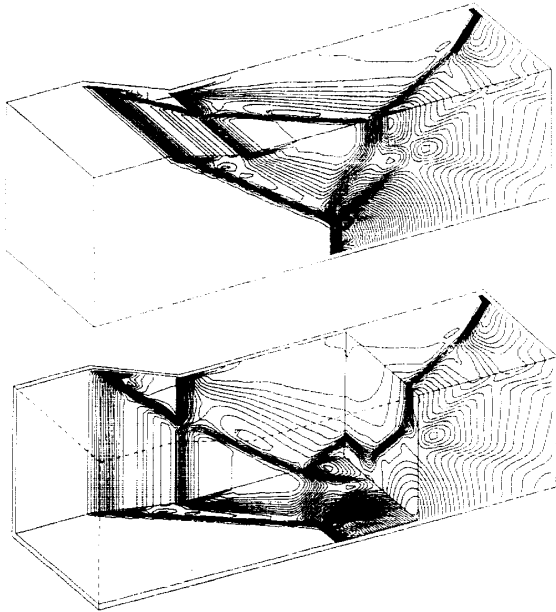


Fig. 3 Non-adaptive grid solution, pressure contours ($\Delta p=0.1$)

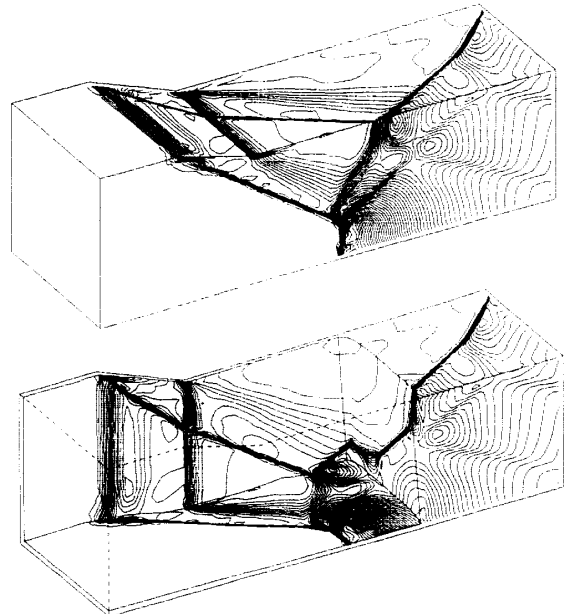


Fig. 5 Adaptive grid solution, pressure contours ($\Delta p=0.1$)

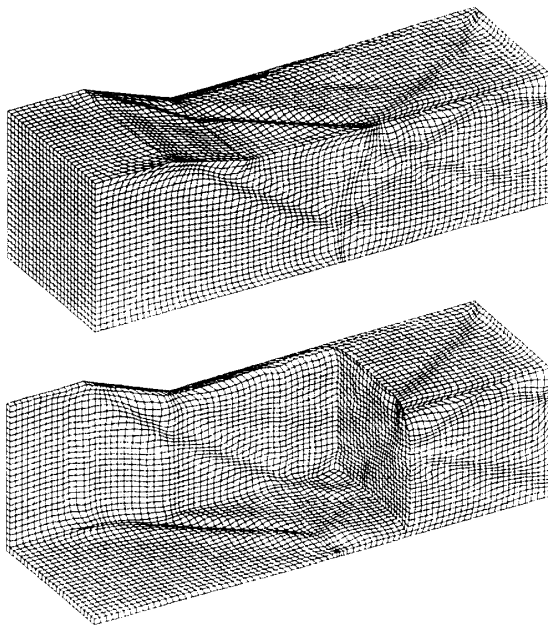


Fig. 4 Solution-adaptive grid

へ補間した際に物理量が平均化(スムージング)されたからおよび、二次元楕円型方程式では格子の移動が二次元、三次元の場合と比べ顕著に起こるからである。

次に境界の面については、格子形成方程式の緩和係数 Ω を 0.2 とし、二次元楕円型方程式を解くことにより格子の移動を行う。スムージングの反復回数式(14)は 1 回とした。角の部分における格子の処理については境界の辺のときと同様に行った。

最後に内点については、緩和係数 Ω を 0.3 とし、三

次元楕円型方程式を解くことにより格子の移動を行う。スムージングの反復回数式(14)は 2 回施した。なお、境界の辺、境界の面、内点のすべてにおいて隣接する格子の最大格子幅比 K [式(8)] を 3 とした。

3・3 格子形成結果 図 2 に初期格子つまり未制御の格子を、図 3 にこの初期格子上で求められた圧力分布を示す。図 4 には初期格子上での解を用いて形成された解適合格子を、図 5 にはこの解適合格子上で求めた圧力分布を示す。それぞれの図において、上段がダクトの表面を、下段がダクトの部分カット図を示している。部分カット図は格子線について切り取られてあるため、初期格子図および初期格子上での圧力分布図は初期格子の格子線上で切り取られてあり、解適合格子図および解適合格子上での圧力分布図は解適合格子の格子線上で切り取られてある。

解適合格子では、衝撃波に沿って格子が集中しているのを確認することができ、この解適合格子上で計算された圧力分布では初期格子で計算されたものに比べ、より急しゅんな圧力変化が捕らえられている。

4. 重畳格子法と組合せた解適合格子法の三次元流れ場への適用

4・1 流れ場の計算条件 重畳格子法と組合せた解適合格子法を図 6 に示すような三次元ダクト内流れへ適用させた。ダクトの形状として、流れ方向に対して下部壁が 6° 、上部壁が直線的に 7° から 9° まで変化しながら絞られているものを用いた。流入マッハ数は

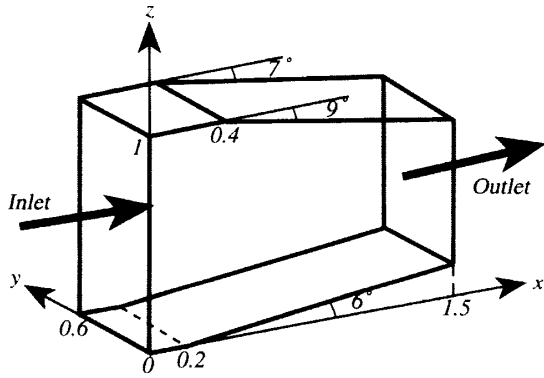


Fig. 6 Three dimensional duct with compression ramp

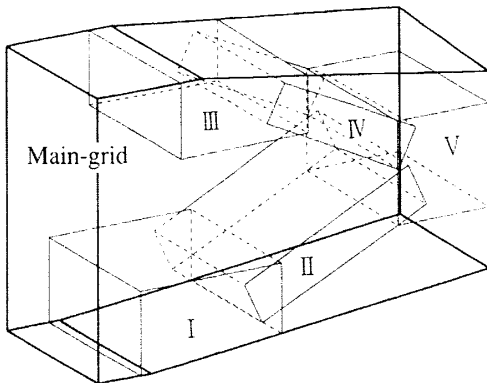


Fig. 7 Schematic layout of the main grid and subgrids in the three-dimensional compression duct

2.7である。

流れの計算方法は3章と同様である。

4.2 格子形成の条件 図7のように衝撃波発生部に2ブロック(補助格子I, III), 衝撃波部に2ブロック(補助格子II, IV), 衝撃波干渉の発生部に1ブロック(補助格子V)の合計5ブロックの補助格子を主格子に配置した。格子数は主格子が $31 \times 13 \times 21$, 補助格子Iが $28 \times 21 \times 16$, 補助格子Vが $31 \times 21 \times 15$, 補助格子IIIが $24 \times 21 \times 13$, 補助格子IVが $25 \times 21 \times 15$, 補助格子Vが $25 \times 21 \times 25$ である。

初期格子として主格子, 補助格子ともに ξ, η, ζ 各方向に対しほぼ等間隔な格子を使用した。なお, 衝撃波干渉部においては初期格子形成の簡素化および解適合格子の自動形成の機能を考慮したうえで1ブロックの格子(補助格子V)を用いた。主格子に配置した補助格子に対し解適合を形成するため, おおのこの補助格子上で求めた解を用いた。解適合格子形成における各パラメータは3章の場合と同じ値を用いた。

4.3 格子形成結果 図8に重畳格子法を用いた初期格子を, 図9にこの初期格子上での解を用いて形

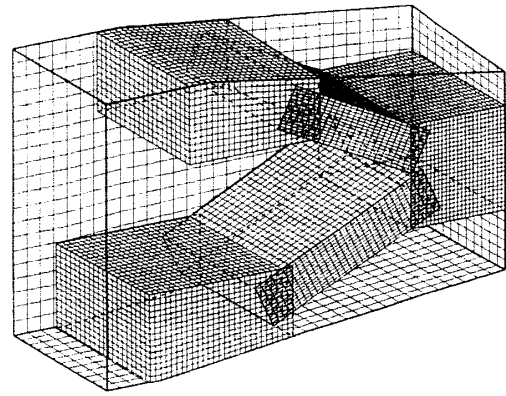


Fig. 8 Overset non-adaptive grid (Initial grid)

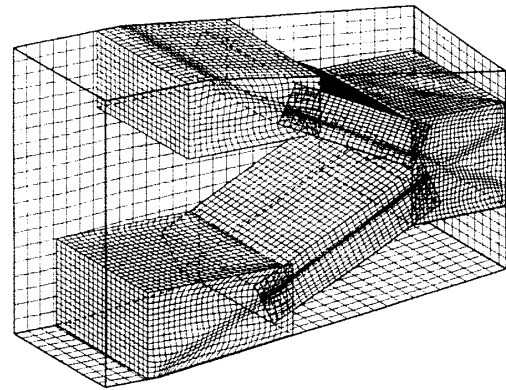


Fig. 9 Generated overset-adaptive grid

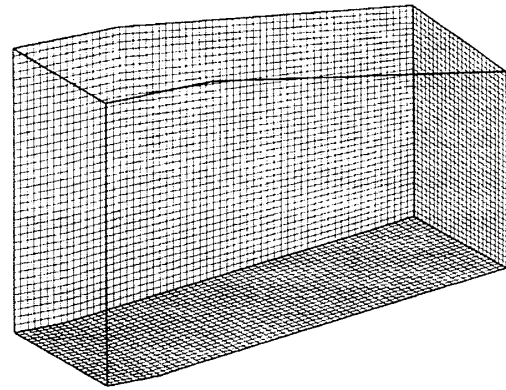


Fig. 10 Single non-adaptive grid (Initial grid)

成された解適合格子を示す。さらに比較用として, 主格子および補助格子の総格子数がほぼ等しくなる単一の格子($61 \times 24 \times 38$)を用いた。比較用単一の初期格子を図10に, この単一格子に対応する解適合格子を図11に示す。図12から図15にはそれぞれの境界面($x=1.5, y=0.6, z=0.0$)での圧力分布であるが, セル中心で値が評価されているため, 半格子幅だけ内側の位置となっている。

重畳格子法を用いた解適合格子では, 複数の衝撃波が存在する流れ場においても十分な格子の集中を実現

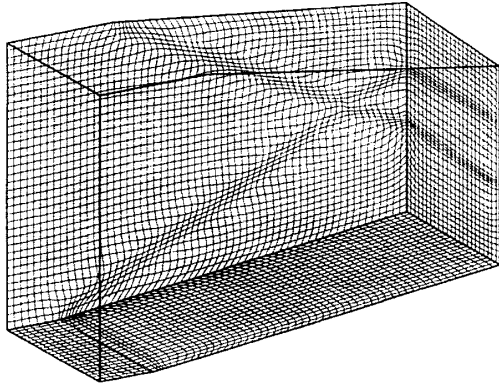


Fig. 11 Generated single adaptive grid
(for comparison)

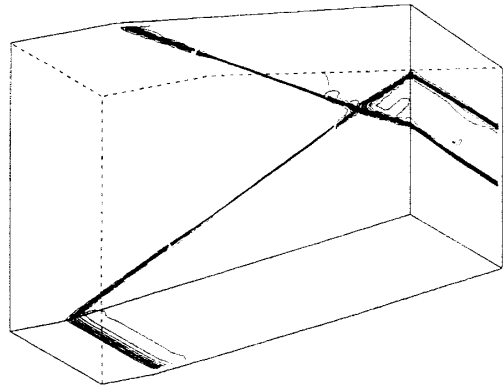


Fig. 13 Overset adaptive grid solution, pressure
contours ($\Delta p=0.05$)

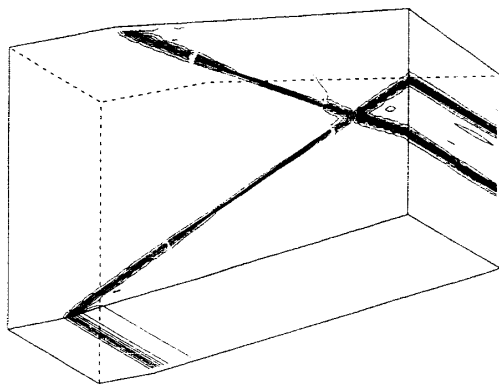


Fig. 12 Overset non-adaptive grid solution, pressure
contours ($\Delta p=0.05$)

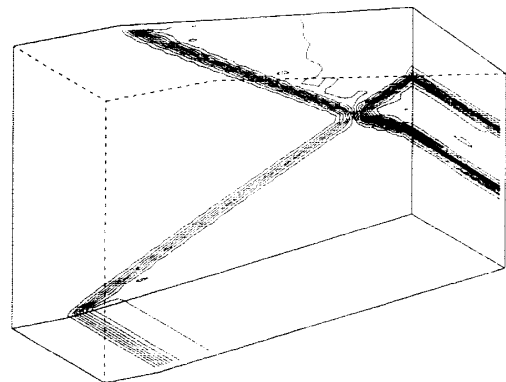


Fig. 14 Single non-adaptive grid solution, pressure
contours ($\Delta p=0.05$)

しており、単一の解適合格子上での解と比べても、さらに鋭い衝撃波を捕らえることができた。

さらに、図9と図11を比較すると重畳・解適合格子は、補助格子を斜め衝撃波に平行に配置することができるので解適合格子の直交性が極めて優れていることがわかる。また、両者ともほぼ同数の格子点を使用しているにもかかわらず、図9に示された解適合格子は、衝撃波の位置に十分に格子が集中しているのがわかる。これに対し、図11に示された単一の解適合格子は、全体としてなめらかな格子を楕円型方程式が形成するように働くので解適合のために格子を集中させようとする働きと競合することにより格子点の取り合いが生じ、十分な格子の集中を得られない。

5. 結 論

本論文では楕円型方程式を用いた三次元解適合格子形成法の定式化を示し、さらに重畳格子法と組合せた三次元重畳・解適合格子法を提案し、圧縮性流れ場に適用した。特に、衝撃波を鋭く捕獲することに主眼を

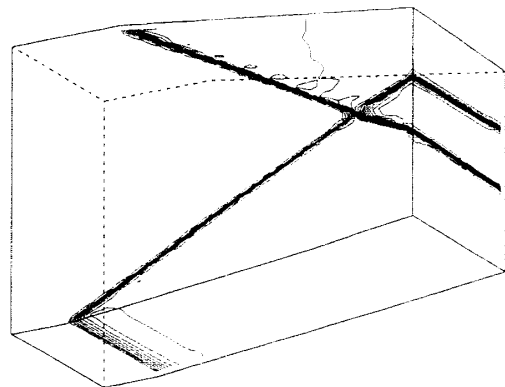


Fig. 15 Single adaptive grid solution, pressure
contours ($\Delta p=0.05$)

において解適合格子を形成した。その結果次のような結論を得た。

(1) 三次元の流れ場に対しても本楕円型解適合格子形成法が有効であり、高分解能な解適合格子を形成するとともに鋭い衝撃波の捕獲に成功した。

(2) 重畳格子法と組合せた解適合格子法では、重ね合わせた補助格子上で解適合格子を形成することに

より、単一格子上での解適合格子に比べさらに鋭い衝撃波が捕らえられるようになった。

(3) また、解適合を行う領域を限定することにより、解適合格子形成を格子の直交性を犠牲にすることなく、より容易に行えるようになった。

(4) さらに、複数の衝撃波が存在する三次元流れ場においても、重畳格子法を併用することで格子点の取り合いによる格子の集中の低下を防ぐことができた。

文 献

(1) Matsuno, K. and Dwyer, H. A., *JCP*, **72**(1988), 40-52.

- (2) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W., *Numerical Grid Generation*, (1985), 188-237, North-Holland.
- (3) 松野謙一・Dwyer, H. A., 第19期日本航空宇宙学会年会講演会論文集, (1988), 94-95.
- (4) 山川勝史・ほか2名, *機論*, **62**-599, B(1996), 2640-2645.
- (5) Thomas, P. D. and Middlecoff, J. F., *AIAA J.*, **18**(1980), 652.
- (6) Van Leer, B., *JCP*, **32**(1978), 347-363.
- (7) Roe, P. L., *JCP*, **43**(1981), 357-372.
- (8) Matsuno, K., *AIAA* 93-3362(1993), 703-710.
- (9) Beam, R. M. and Warming, R. F., *AIAA J.*, **16**(1978), 393-402.