

重畳格子の概念を用いた非構造移動はめ込み型格子法*

山川 勝史^{*1}, 松野 謙一^{*2}

Unstructured Moving Patched-Grid Method Using Concept of Overset Grid

Masashi YAMAKAWA^{*3} and Kenichi MATSUNO^{*3} Division of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Gosyokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

From a point of view of grid generation, an overset grid generation method is suitable for a flow around moving complicated-shaped body. The overset grid method treats two grid-types which are a main-grid placed on all over the flow field and a sub-grid placed around the body. However it is difficult to satisfy a physical conservation law since the overset grid method interpolates the value between the main-grid and the sub-grid. To assure the conservation law on the overlapped region, we propose a new method that the overset grid method is combined to the unstructured moving grid finite volume method. In this method the sub-grid and the main-grid are joined by the unstructured grid. The feature of the method is that a control volume on which a space-time unified domain is adopted, and the method assures the geometric conservation law too even if the sub-grid moves and deforms. The method is applied to a problem such that complicated-shaped body flies in supersonic flow.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Unsteady Flow, Unstructured Mesh, Overset Grid, Moving Boundary Problem

1. 緒 言

一般的に移動物体周りの計算には重畳格子法^①がよく採用されている。重畳格子法とは流れ全体を覆う主格子と、流れ中に配置された物体を覆う補助格子とを個別に配置し、両者の境界において物理量をやり取りすることで流れ場を計算する手法である。本手法の最大のメリットは独立した格子形成による柔軟性の高さである。本手法を移動する物体周りの流れ場への適用を考えた場合、①より複雑な物体形状に対し全体の計算に影響を与えない独立した格子が形成できること、②また補助格子を独立させているので物体の移動時には補助格子のみ動かせばよく効率的であること、等が挙げられる。さらにこの重畳格子法は、そもそも柔軟性の高い非構造格子に対してさえ採用^②される程の自由度の高さを有しており、非常に優れた格子形成法の一つである。ただし本手法における大きな欠点は、主格子および補助格子間において物理量の受け渡しを行う際、補間を行うことであり、これにより基本的に流

れの保存則は満たさなくなる。特に圧縮性流れにおける衝撃波部などではランキン・ユゴニオ関係が崩壊し正確な解を得ることが困難となる。

この問題に対し、一般的には重畳部分における計算格子を増加させ、誤差が許容できる程度まで分解能を向上させることにより対処している。ただし増加させる格子数に限りがあることから保存則を完全に満たすことは不可能である。一方、保存則を満たした補間方法^③についても研究がされているが、単純な問題に限定されており実用的ではない。結局の所、重畳格子(重ねた格子同士)において完全に保存則を満たすのは困難であるといえよう。そこで本論文ではこれら重畳格子法の特徴と利点のみを保持しつつ前述の問題点を克服する方法、つまり物体周りに配置された補助格子について保存則を完全に満足させたまま移動させることを可能とする方法の提案を試みる。

まず物体の移動が無ければ補助格子と主格子を接続するための新たな格子を形成し、その格子内において保存則が満たされるよう離散化すれば良い。例えば接続部に非構造格子を用いると容易に形成できる。これは領域分割法におけるはめ込み型格子(Patched-Grid)と同じ考えである。結果的に補助格子と主格子が結合

* 原稿受付 2006年12月11日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学大学院工学科学研究科(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。^{*2} 正員, フェロー, 京都工芸繊維大学大学院工学科学研究科。

E-mail: yamakawa@kit.ac.jp

され単一格子となることで、保存則を満たすことができる。しかし物体の移動がある場合、常に静止している主格子と時間と共に移動する補助格子との間に位置する接続格子自体は、はめ込まれた補助格子の移動に合わせて変形することになる。さらにその移動量が多い場合には接続格子を消滅させたり新たに発生させたりして、スムーズに補助格子を移動させる必要が生じる。この場合、移動する補助格子および変形・消滅・発生する接続格子については、流れの保存則に加え幾何保存則^⑩をも満足させる必要が生じる。つまり格子の移動・変形・消滅・発生が流れ場へ影響を与えないようにする対処する必要が生じるのである。これら時間毎に変化する格子については、時間-空間を合わせたコントロールボリュームを形成し、その検査体積について幾何保存則を満たすように離散化した非構造移動格子有限体積法^⑨を用いることとする。本手法は著者らにより提案され、圧縮性流れ場を対象に様々な非定常問題へ適用・発展させその有効性を示している。

本論文では重畳格子法の概念をもとに非構造移動格子有限体積法を組み入れた新しい計算手法：非構造移動はめ込み型格子法を提案することを目的とする。本手法ははめ込まれた物体周りの格子が、重畳格子における補助格子の如く移動するものであり、重畳格子法の特長と機能を引継いだ新しいはめ込み型格子法である。そして本手法の最大の特徴は、重畳格子法の重要な基本概念である補助格子の独立性を完全に保持したまま、重畳格子法の欠点を克服した点にある。現時点では2次元移動境界問題に限定はしているものの、本手法は物理、幾何の両保存則を完全に満足させている。これにより移動物体が合体/分離/大変形する場合や、物体が計算領域外へ出て行くような場合など、通常、重畳格子法では計算が破綻する恐れのある問題でさえ安定して解くことが期待できる。もちろんこの様な場合においても補助格子を用いることによる柔軟な格子形成と、補助格子のみの移動による計算の高効率性を損なっていない。つまり本手法は重畳格子法を包括し卓越する可能性を示している。

2 計算方法および計算手順

本手法は物体周りに物体形状に合わせて生成した補助格子を主格子上に配置させ、その補助格子のみを物体の動きにあわせて移動させるものであり、重畳格子法を用いた場合と同様の計算手法である。ただし物理保存と幾何保存を同時且つ完全に満足させるため、各

格子間の接続がポイントとなる。以下本手法において補助格子を移動させる場合の計算方法および計算手順について図1に沿って説明する。

Step1: まず通常の重畳格子法同様に、物体周りに形成した補助格子を主格子上に重ね合わせる。

Step2: 補助格子内に格子点を持つ主格子の要素を削除する。ただし本プロセスは補助格子外周に沿って重なっている主格子要素のみを厳密に抽出する必要はない。主格子と補助格子との間に隙間を生じさせるのが目的であるため、例えば削除される主格子要素の範囲を少し広くしても問題は無い。

Step3: 補助格子と主格子間の隙間に新たに接続のための要素(接続格子)を配置する。具体的には補助格子の外部境界を形成している格子点と、前工程で削除された主格子の境界とを格子線で繋ぐ。本手法では全ての要素を三角形の非構造格子としているので、この接続格子についても同様とする。

Step4: 物体の動きにあわせて補助格子を移動(本図の場合、左方向へ)させる。補助格子が移動することにより補助格子の進行方向前方側(本図の場合左側)の要素が極端に小さくなるので、この部分について接続部の要素と主格子の一部の要素を結合させることとする。これは補助格子が主格子と重なり合う前に対処する必要があるため、接続格子の大きさや歪について基準値を設け、基準値を下回った時に要素の結合を行う。

Step5: 具体的には、基準値を下回った接続格子の要素とその要素に隣接する主格子の要素とを結合する。結合により新たに形成された格子は接続格子となり、結果的に主格子の要素が削除されたことになる。

Step6: 前方の主格子が削除されたことにより、補助格子をさらに移動させることが出来るが、次に後方側の接続格子が大きく変形してしまう。これにより物体後方の計算精度低下が懸念されるため、本接続格子に対しても何らかの修正が必要となる。当然ながら接続格子を分割・細分化するのが好ましいが、単純に分割するだけでは補助格子の軌跡が全て接続格子で埋ってしまう。そこで分割した一部の格子を主格子へ戻すことにする。そもそも補助格子の外側はある程度均一に格子が配置されていることが好ましく、その他計算効率等考慮して主格子を再配置することが妥当といえよう。

Step7: 分割した補助格子の一部を主格子に戻すためには、分割後に格子点を移動させ元の主格子形状にする必要がある。具体的には元の主格子データ(削除される前のデータ)を記憶させておき、その主格子形

状に合わせて、分割時に発生した格子点を移動させるという方法をとる。実際には発生した格子点について主格子データ上でサーチを行い、最寄の場所へ格子点を動かすことになる。この場合格子点の移動により極端に小さい要素や極端に歪んだ要素が発生しそうな場合には変形を一旦中止し、スムーズに主格子に戻すことが可能となるまで接続格子のまま据え置いておく。また、本プロセスまでで補助格子前後の要素に対しては修正が完了したが、補助格子にせん断が掛かる箇所（本図では補助格子の上下部分）について極端に歪んだ要素となっている。

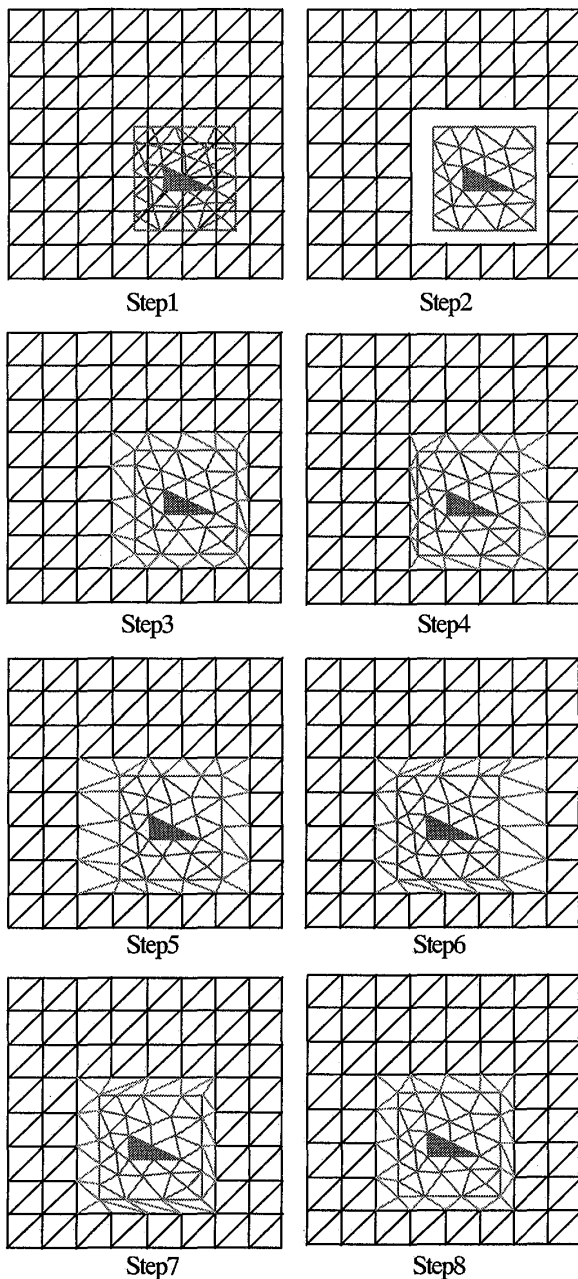


Fig. 1 Procedure of moving-overset-grid

Step8: 極端に歪んだ要素については隣接する接続格子同士の対角線の入れ替えを行う。またこの対角線の入替え作業は主格子や接続格子の削除、分割時においても実施する場合もある。以上で一連の修正を完了し、相対的に補助格子は移動しているが Step8 の格子は移動前の格子 (Step3 の格子) と同様のトポロジーを得ることができている。よって以後 Step3 から Step8 を繰り返すことで補助格子の移動を継続することができる。

これらのプロセスの中で特に格子の移動、対角線の入替え、要素の結合、要素の削除について、各要素における幾何保存則を壊さないようにすることが重要となる。そのため、これら要素の変形に対し非構造移動格子有限体積法を適用する。

3. 非構造移動格子有限体積法

前章のプロセスにおいて、補助格子の移動、接続格子分割、主格子との結合や修正（隣接する要素間での対角線の入替）等、本手法では様々な格子の変形を行う必要が生じている。これら格子変形（格子点の移動・追加・削除・修正）を常に幾何保存則を満足させた状態で行う為、以下に示す非構造移動格子有限体積法を用いることとする。本手法の詳細は文献⁽⁷⁾⁽⁸⁾に委ねるとし、ここでは各変形時の検査体積の取り扱いについてその概要を記述するに留める。

まず流れの基礎式として式(1)に示すように、発散形表示させた二次元オイラー方程式を用いる。

$$\tilde{\nabla} \tilde{F} = 0 \tag{1}$$

ここで $\tilde{\nabla}$ は $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial t)$ 、 \tilde{F} は (E, F, q) であり、 E, F は x 方向、 y 方向の流束ベクトル、 q は保存量ベクトルを示している。次に幾何保存則を満たすように、式(1)を時間-空間に跨るコントロールボリュームについて体積積分する。本論文ではセル中心法を採用するので、検査体積は図2に示すような五面体となる。n時間段階から n+1時間段階へ進む時に格子が変化する場合、これが取り扱われる検査体積となる。

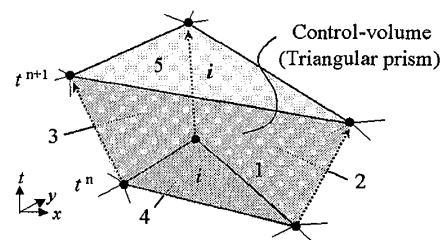


Fig.2 Control volume on moving grid system

式(1)をこのコントロールボリュームについて体積積分し、さらにガウスの発散定理を用いて次のように変形する。

$$\int_V \nabla \tilde{F} dV = \oint_S \tilde{F} \cdot n dS$$

$$= \sum_{\ell=1}^5 (En_x + Fn_y + qn_t)_{\ell} = 0 \quad (2)$$

ここで $n_{\ell} = (n_x, n_y, n_t)_{\ell}$, ($\ell = 1, 2, \dots, 5$) は五面体の ℓ 番目の表面に対する外向き法線ベクトルである。また第4面および第5面は時間軸に対し垂直であることから、具体的に解くべき離散式は以下のようになる。

$$q^{n+1}(n_t)_5 + q^n(n_t)_4 + \sum_{\ell=1}^3 \left\{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} \right\}_{\ell} = 0 \quad (3)$$

これに対し格子点を追加する場合、つまり要素を分割する場合は次のようになる。まず検査体積を図3に模式的に示す。

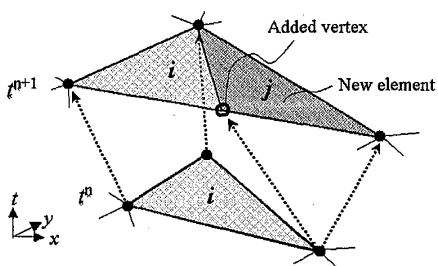


Fig.3 Control volume with addition of element

一つの要素を二つに分割する場合、一本の格子線上に格子点が追加されることとなり、その結果要素 i は i および j に分割される。よって要素 i は時間 n 段階および $n+1$ 段階に挟まれた五面体 (要素 i) について、また要素 $i+1$ は両段階に挟まれた四面体 (要素 j) についてそれぞれ体積積分されることになる。五面体については式(3)に示す離散式を解くこととなる。一方四面体については、 n 段階で面積 0 である要素が、 $n+1$ 段階で格子点の追加により作成された要素を持つことになる。これは式(3)における $(n_t)_4 = 0$ と見なすことが出来、よって式(3)は次式のように表すこととなる。

$$q^{n+1}(n_t)_5 + \sum_{\ell=1}^3 \left\{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} \right\}_{\ell} = 0 \quad (4)$$

また、格子点を削除、つまり要素を結合する場合には n 段階で結合すべき隣接する要素 i および j を合わ

せて取り扱うこととなる。この場合対象となる検査体積は、図4に示す六面体となる。解くべき離散式については n 段階で二つの要素を合わせ、具体的に式(5)のように表すことになる。

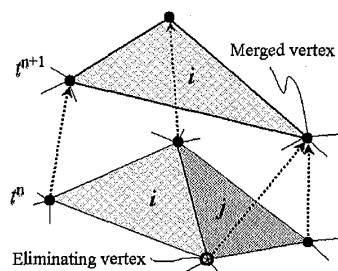


Fig.4 Control volume with elimination of element

$$q_i^{n+1}(n_t)_6 + q_i^n(n_t)_5 + q_j^n(n_t)_5 + \sum_{\ell=1}^4 \left\{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} \right\}_{\ell} = 0 \quad (5)$$

歪んだ格子の修正、つまり隣接する要素間の境界線の入れ替えは次のようにして行う。まず n 時間段階における境界線を入れ替える要素を i および $i+1$ とする。そして図5に示すように $n+1$ 時間段階において要素 i は変形し要素 $i+1$ は消滅するとする。また $n+1$ 時間段階において新たに要素 j が発生する。つまり要素を i および $i+1$ を形成する六面体と、要素 j を形成する四面体を組み合わせたコントロールボリュームについてそれぞれ有限体積法を適用することになる。これにより境界線を入れ替えるコントロールボリュームについてその側面の法線ベクトルを正しく評価することができ、結果、幾何保存則を満たすことができる。

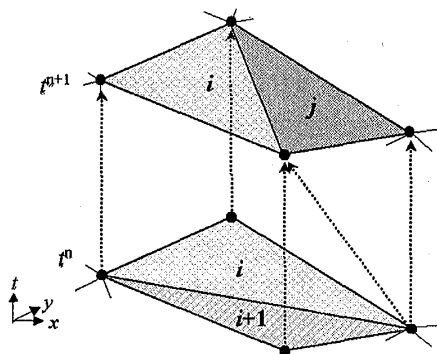


Fig.5 Control volume for replacement of a side line

具体的に解くべき離散式については、まず n 段階で要素を i および $i+1$ を併せた六面体について次式のように表すことになる。

$$q_i^{n+1} \{ (n_t)_8 \}_i + q_i^n \{ (n_t)_7 \}_i + q_{i+1}^n \{ (n_t)_7 \}_j + \sum_{\ell=1}^4 \{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} \}_\ell = 0 \quad (6)$$

また、要素 j については次式となる。

$$q_j^{n+1} (n_t)_8 + \sum_{\ell=4}^6 \{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} \}_\ell = 0 \quad (7)$$

ここで、上式で用いた数字 (1~8) は図5のコントロールボリュームに対し、8が上底、7が下底、1~4は六面体の側面、4~6は四面体の側面を示しており、4は六面体と四面体が接する境界面である。結果的に、六面体は格子点が消滅する式(5)に一致し、四面体は格子点が追加される式(4)に一致するため、プログラミングはこれらを用いると容易に行うことができる。

最終的に解くべき式(3)~(7)は陰的スキームであることから擬似時間内部反復法⁹⁾を用い、擬似時間の進行にはRRK法を用いた(詳細は文献¹⁰⁾を参照されたい)。また、各式における非粘性流束ベクトルの評価はRoeのFDS法¹¹⁾を用い、Venkatakrishnan¹²⁾により提案された制限関数を使用した。

4. スキームの検証

本手法に対する計算コードおよび、幾何保存性を確認するため、主格子に配置した補助格子を時間と共に移動させ、その計算領域全体(主格子および補助格子)において一様流の捕捉を行った。

主格子および補助格子は一辺の長さがそれぞれ1.0, 0.32の正方形であり、補助格子の移動は主格子の中央を中心に反時計回りに一周させる。図6に主格子と補助格子の初期状態および接続後の状態を示す。なお主格子は構造的に図6のように作成し要素数は200、補助格子はデローニーの方法を用いて作成し要素数は104である。また初期状態として、全要素に一様流 $\rho_\infty = 1.0$, $p_\infty = 1.0/\gamma$ ($\gamma = 1.4$), $u = 1.0$, $v = 1.0$ を与え $t = 16.0$ (時間刻み幅0.01で1600時間ステップ)まで計算を行う。

図7に途中段階の格子の様子を示している。補助格子の移動に伴い主格子間において適宜接続、分割が行えており、計算コードが問題ないことを確認できる。また図8には密度に対する初期値との誤差履歴を示す。誤差は式(8)のように定義した。結果、初期値との誤差は 10^{-15} レベル、倍精度計算におけるマシン0であった。これはつまり補助格子の移動

が系として完全に閉じており、この格子移動が流れ場に全く変化を与えていないことを数値計算上で示すものである。通常、重畳格子法では格子の解像度に依存はするが、補助格子の移動および主格子とのやり取りにより何某かの誤差が発生する。しかし、本手法を用いる限り今後如何なる流れ場においても(流れ場の状態にとらわれず)補助格子の移動(移動にあたり計算要素が追加/削除の実施も含める)が流れ場に影響を及ぼすことが無いということが言えよう。

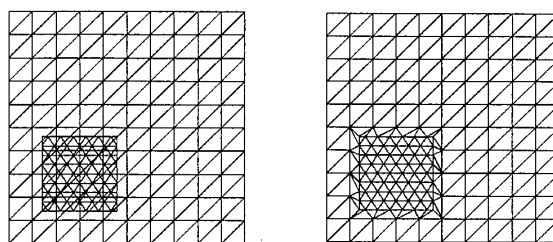


Fig. 6 Connection of sub and main grid on Overset grid system (Left: before connection, Right: after connection)

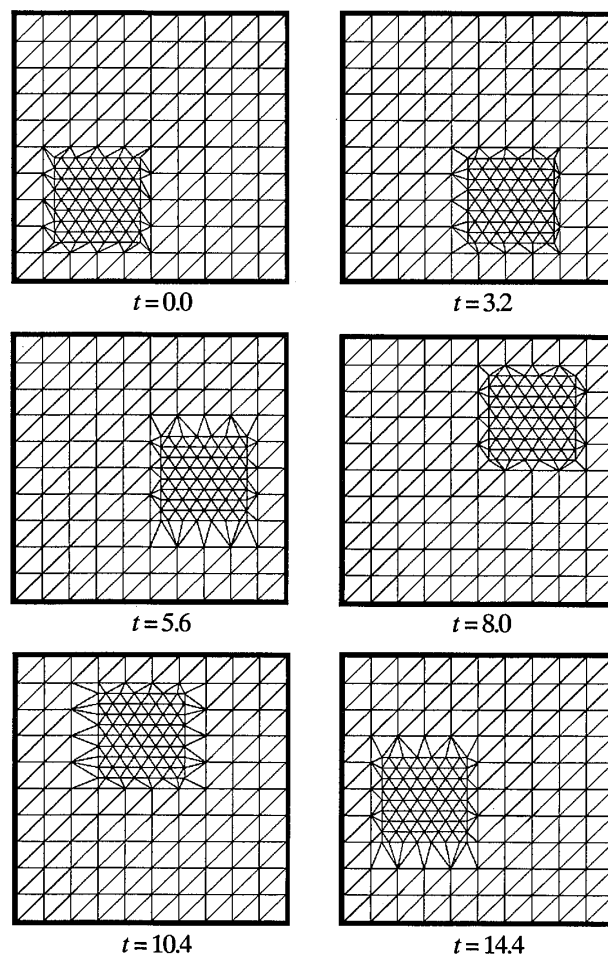


Fig. 7 Moving-Overset-Grid on test problem

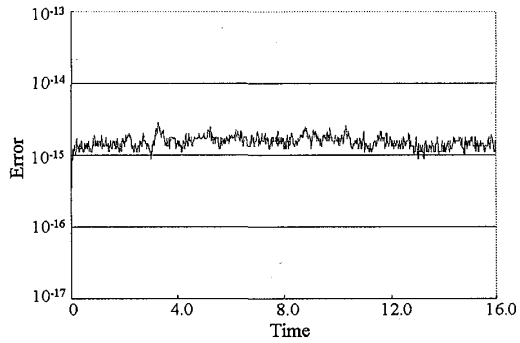


Fig. 8 History of Error of density

$$ERROR = MAX \left[\left\{ \frac{\rho - \rho_{\infty}}{\rho_{\infty}} \right\}_i \right] \quad (8)$$

5. 移動する複雑形状物体周りの流れ場への適用

本項では本手法の実用性についての確認のため、簡単な圧縮性流れへ適用を行った。図10に示すような移動する複雑形状物体周りの流れ場である。まず超音速（流入マッハ数=2.0）で流入するダクト内に、物体（文字“*AIR*”）を配置（物体の中央座標： $x=1.0, y=0.3$ ）する。 $t=0.0$ で物体を速度0.1で上流側へ移動開始させ、 $t=5.0$ で上壁側へ速度0.1のまま移動方向を変化させ、最終的に $t=9.0$ まで計算を行う。計算の初期条件は初期状態での定常解を用いる。また境界条件は流入側の各物理量を固定、流出側は各物理量を外挿とし上下壁は反射条件とした。要素数は主格子が1600、補助格子が984である。主格子は検証問題の場合と同様に構造的に形成した。また補助格子は主格子との境界において要素面積が急激に変化しないよう、図11に示すような物体周りでは細かく、外部境界は粗い計算格子を用いた。

図9に各時間における計算結果を示す。上段が計算格子、下段がその重畳格子での圧力分布を示している。時間と共に移動する物体に合わせて補助格子をスムーズに移動できていることを確認できる。また物体前方で発生した衝撃波が上下壁面で反射・干渉を繰り返しながら後方へ進んでおり、物体の移動にあわせてこれらの衝撃波の移動も確認できる。以上より定性的ではあるが本非構造移動はめ込み型格子法を問題なく移動する複雑形状物体周りの流れ場に適用できることを確認できた。

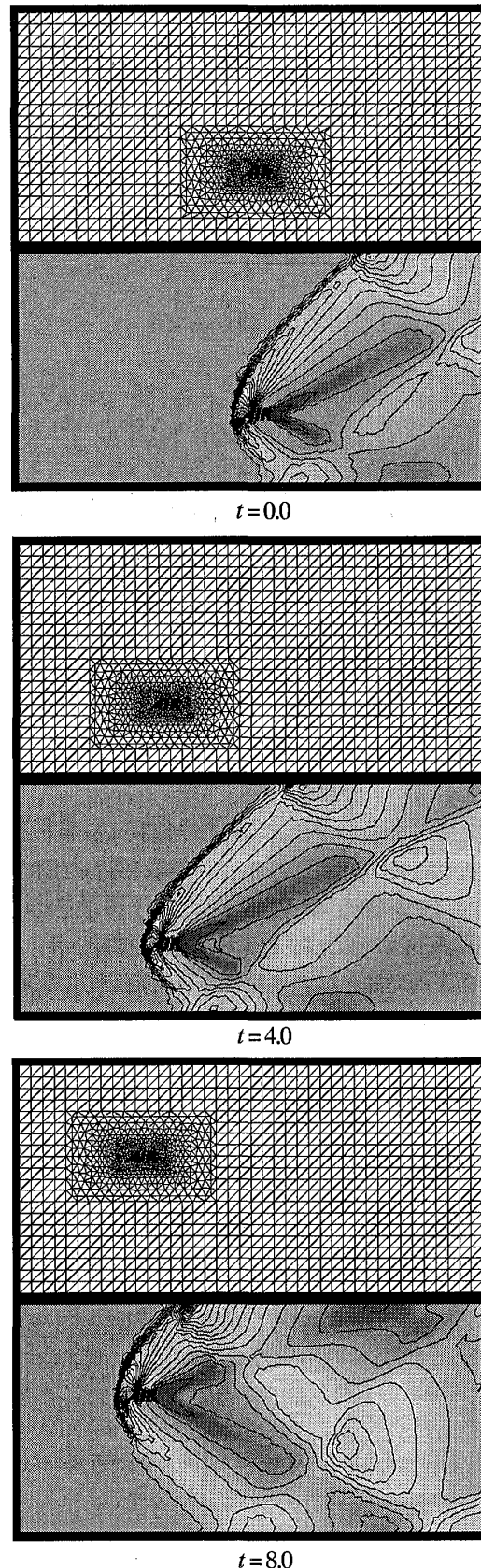


Fig.9 A supersonic flow with complicated traveling bodies
(Upper : Calculation mesh, Lower : Pressure contours)

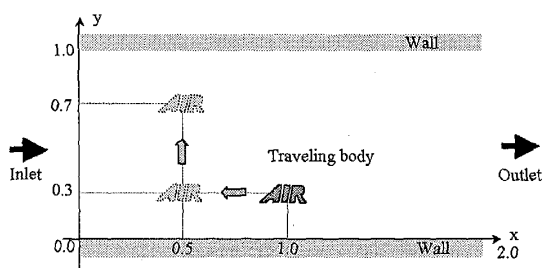


Fig.10 Calculation model

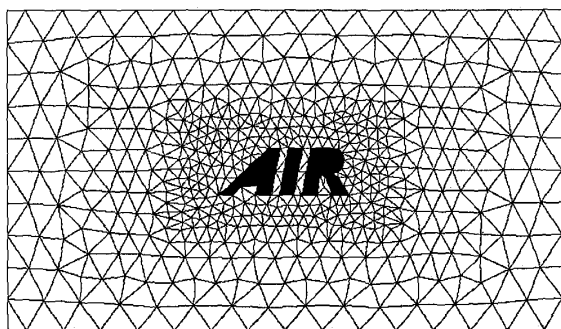


Fig.11 Initial grid

6. 結 論

移動する物体周りの流れ場を精度良く計算するため重畳格子法と非構造移動格子有限体積法を融合・発展させた非構造移動はめ込み型格子法を提案し、検証問題へ適用した結果以下の結論を得た。

- (1) 格子が時間と共に移動する重畳格子法において、格子移動に起因する精度低下を完全に回避できる計算アルゴリズムを構築した。
- (2) 本非構造移動はめ込み型格子法を検証問題へ適用した結果、誤差レベルがマシン0であり、幾何保存則を完全に満足出来ていることを確認した。
- (3) 一例ではあるが実用問題として超音速ダクト内を移動する物体周りの流れ場へ適用を行った結果、本手法の有効性を示せた。

文 献

- (1) J. L. Steger, et al., A Chimera Grid Scheme; Advances in Grid Generation, *ASME FED-5*, (1983) pp. 59-69.

- (2) Kao, K. H. et al., Grid Adaptation Using Chimera Composite Overlapping Meshes, *AIAA-93-3389-CP*, (1993) pp.990-1001.
- (3) K. Nakahashi, et al., An Intergrid-Boundary Definition Method for Overset Unstructured Grid Approach, *AIAA J.*, Vol. 38, No. 11(2000), pp. 2077-2084
- (4) Y. J. Moon, et al, Conservative Treatment of Boundary Interfaces for Overlaid Grid and Multi-Level Grid Adaptations, *AIAA Paper*, 89—1980-CP, (1989) , pp. 480-494
- (5) P. D. Thomas, et al, Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grid, *AIAA J.*, Vol. 17, No. 17(1979), pp. 1030-1037
- (6) K. Matsuno, et al, A Moving-Mesh Finite-Volume Scheme for Compressible Flows with Traveling Wall Boundaries, *Computational Fluid Dynamics 2000*, Springer July, (2001) pp. 705-710.
- (7) M. Yamakawa, et al, An Iterative Finite-Volume Method on an Unstructured Moving-Grid (1st Report, The Fundamental Formulation and Validation for Unsteady Compressible Flows), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 69, No. 683, B (2003) pp. 1577-1582
- (8) M. Yamakawa, et al, An Iterative Finite-Volume Method on an Unstructured Moving-Grid (2nd Report, Application to Moving Boundary Problem with Body Separation / Mergence), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 70, No. 689, B (2004) pp. 25-30
- (9) C. L. Rumsey, et al, Efficiency and Accuracy of Time-Accurate Turbulent Navier-Stokes Computations, *Computers and Fluids*, Vol. 25, (1996), pp. 217-236.
- (10) M. Yamakawa, et al, Unstructured Adaptively-Moving-Grid Finite-Volume Method, *Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 52, No. 607, (2004) pp. 348-354
- (11) P. L. Roe, Approximate Riemann Solvers Parameter Vectors and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics.*, Vol. 43, (1981), pp 357-372.
- (12) V. Venkatakrishnan, On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solutions, *AIAA Paper*, 93-0880, (1993)