

## 非構造移動格子有限体積法\*

### (第2報, 物体の分離合体を伴う移動境界問題への応用)

山川 勝史<sup>\*1</sup>, 松野 謙一<sup>\*1</sup>

## An Iterative Finite-Volume Method on an Unstructured Moving Grid (2nd Report, Application to Moving Boundary Problem with Body Separation/Mergence)

Masashi YAMAKAWA<sup>\*2</sup> and Kenichi MATSUNO

<sup>\*2</sup> Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,  
Gosyokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

In this paper, a new finite-volume method on moving unstructured-grid system is presented and developed for compressible flows. The present moving-grid finite-volume method includes new algorithm for eliminating and/or merging cells according to a change of geometry, which makes it possible to calculate flow around bodies which are united into a single body or separated into another multiple bodies. A control volume for discretization is considered in the space-time unified space, which assures both physical and geometrical conservation laws even if the grid system is moved as well as deformed with eliminating or merging cells. The present method is described for two dimensional space in detail and validated using simple test problems. Applications to a gun tunnel problem and a two-bodies docking and separation in a supersonic flow show a promising feature of the method.

**Key Words:** Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Unsteady Flow, Unstructured Mesh, Finite Volume Method

### 1. 緒 論

圧縮性流体に対する計算流体力学は、定常問題がほぼ実用の域に達していることから非定常問題の研究が盛んに行われている。その中でも物体同士の衝突による合体や、爆発により物体が分離するような複雑且つ大変形を伴う移動境界問題に対する計算は、工業界においてもニーズが高く非常に興味深い。通常、移動物体周りの計算や物体の変形を伴わない簡易な分離問題に対しては、移動する物体周りに個別に格子を配置し計算を行う重畳格子法<sup>1)</sup>が主流である。しかしながら流れ場全体に配置した主格子と、物体周りに配置した副格子間で内挿を用いる前記手法では、流れの保存則を満たすことが困難なことから計算の精度低下が免れない。また、分離合体時に見られる物体境界部の大変形に対し計算格子を追従させるのは非常に困難である。

このような複雑な移動境界問題を取り扱う場合、クリアすべき課題が幾つかある。まず境界の移動に伴

う計算格子の移動・変形に対し、いかにして保存則を満足させるか、であり、各時間段階において計算格子が変化する場合、各格子に対するメトリックの評価がポイントとなる。本手法では時間毎に変化する格子について時間-空間を合わせたコントロールボリュームを形成し、その検査体積について幾何保存則<sup>2)</sup>を満たすように離散化した移動格子有限体積法<sup>3)</sup>を用いる。つまり、時間毎に変化する格子について時間段階を跨るようにコントロールボリュームを評価する。これにより例えば二次元流れ問題については、 $x$ 方向、 $y$ 方向に加え時間軸  $t$  方向のベクトルを考慮し、三次元的に取り扱うこととなる。

もう一つの課題は、物体同士の分離合体時に必要な2物体間の計算格子の再構築である。合体時には物体間に配置してある計算格子を消去する必要が、また分離時には物体間に新たに格子点を配置する必要がそれぞれ生じる。これらの問題に対し構造格子では格子点を追加削除する箇所が部分的に非構造的になり計算のプログラミングが困難になるだけでなく、分離合体時の物体形状変化に格子を追従させるのは不可能に近い。そこで著者らは前述移動格子有限体積法を格子の自由度の高い非構造格子へ発展させた非構造移動格子有限体積法<sup>4)</sup>を提案している。本論文の目的は本手法

\* 原稿受付 2003年4月16日。

<sup>\*1</sup> 正員, 京都工芸繊維大学工学部(☎606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E-mail: yamakawa@ipc.kit.ac.jp

をさらに発展させ、幾何保存則を満たしつつ格子点の追加・削除を任意に実行可能なアルゴリズムを構築することである。これにより物体同士の分離、合体時の流れを精度良く計算することに成功した。まず、二次元非粘性圧縮性流れを対象に、格子の追加・削除を伴う非構造移動格子有限体積法の定式化を示し、本スキームの検証を行う。次に実用問題として、まずガンタンネル問題へ適用し、格子の追加・削除機能の有無2ケースについて比較考察を行う。最後に応用問題として物体の分離合体問題として管内を移動しながら分離合体を行う物体周りの流れ場へ適用し、その有効性を示す。

## 2. 非構造移動格子有限体積法

**2.1 概要** 非構造格子に対し空間および時間を同時に取り扱い、幾何保存則を満たすよう離散化した非構造移動格子有限体積法について、詳細は文献<sup>(6)</sup>に委ねるとし、ここでは次節での説明を考慮しその概要を記述する。

本論文で取り扱う流れの基礎式として式(1)に示すように空間-時間の統一空間において、発散形表示させた二次元オイラー方程式を用いる。

$$\tilde{\nabla} \tilde{F} = 0 \tag{1}$$

ここで $\tilde{\nabla}$ は $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial t)$ 、 $\tilde{F}$ は $(E, F, q)$ であり、 $E, F$ は $x$ 方向、 $y$ 方向の流束ベクトル、 $q$ は保存量ベクトルを示している。本式に対し、幾何保存則を満たすよう、図1に示すコントロールボリュームについて有限体積法を適用する。本論文ではセル中心法を採用するので、検査体積は二つの時間段階に跨る五面体となる。

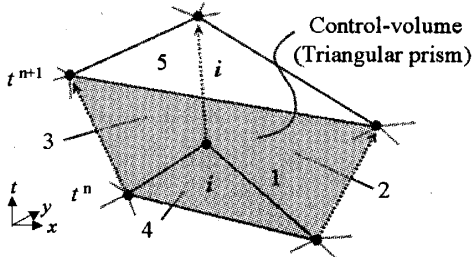


Fig.1 Control volume in space-time unified system

式(1)をこのコントロールボリュームについて体積積分し、さらにガウスの発散定理を用いて次のように変形する。

$$\int_V \tilde{\nabla} \tilde{F} dV = \oint_S \tilde{F} \cdot n dS = \sum_{l=1}^5 (En_x + Fn_y + qn_t)_l = 0 \tag{2}$$

ここで $n_l = (n_x, n_y, n_t)$ 、 $(l=1, 2, \dots, 5)$ は五面体の $l$ 番目の表面に対する外向き法線ベクトルである。ただし $l=1, 2, 3$ 面は平面で無くなる可能性があるが、各面に対し代表となる一つの法線ベクトルを決定する必要があるため、各面内の対角線ベクトルを $\vec{A}$ と $\vec{B}$ とし、これらを用い $n_l$ は次式にて評価する。

$$n_l = \frac{1}{2} \vec{A} \times \vec{B} \tag{3}$$

また第4面および第5面は時間軸に対し垂直であることから、具体的に解くべき離散式は以下のようになる。

$$q^{n+1}(n_t)_5 + q^n(n_t)_4 + \sum_{l=1}^3 \{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} \}_l = 0 \tag{4}$$

**2.2 計算要素の追加・削除時の定式化** 物体同士が合体する場合には物体間に配置されていた格子点を削除する必要が生じ、また物体が分離する場合には物体間に新たに格子点を配置する必要が生じる。著者らは文献<sup>(6)</sup>で構造格子を対象に移動境界問題における透過格子点についての取り扱いを論述しており、本手法をベースに非構造格子における格子点の追加・削除時の計算アルゴリズムについて記述する。格子点の追加を行う場合、つまり要素を追加する場合の検査体積を図2に模式的に示す。

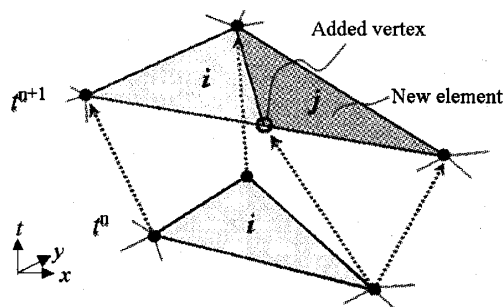


Fig.2 Control volume with addition of element

便宜上格子線上に格子点を追加するとした場合、要素 $i$ は $i$ および $j$ に分割される。よって要素 $i$ は時間 $n$ 段階および $n+1$ 段階に挟まれた五面体(要素 $i$ )について、また要素 $i+1$ は両段階に挟まれた四面体

(要素  $j$ ) についてそれぞれ体積積分することになる. 五面体については式 (4) に示す離散式を解くこととなる. 四面体については,  $n$  段階で面積 0 である要素が,  $n+1$  段階で格子点の追加により作成された要素を持つことになる. これは式 (4) における  $(n)_4=0$  と見なすことが出来, よって式 (4) は次式のように表すこととなる.

$$q^{n+1}(n_t)_5 + \sum_{i=1}^3 \left\{ E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2} \right\} \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (5)$$

また, 格子点を削除, つまり要素を結合する場合には  $n$  段階で結合すべき隣接する要素  $i$  および  $j$  を合わせて取り扱うこととなる. この場合対象となる検査体積は, 図 3 に示す六面体となる.

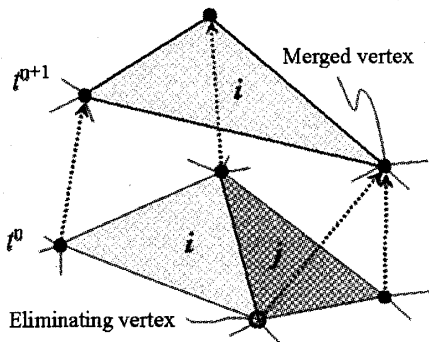


Fig.3 Control volume with elimination of element

解くべき離散式については  $n$  段階で二つの要素を合わせ, 具体的に式 (6) のように表すこととなる.

$$q_i^{n+1}(n_t)_6 + q_i^n(n_t)_5 + q_j^n(n_t)_5 + \sum_{i=1}^4 \left\{ E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2} \right\} \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (6)$$

**2.3 計算方法** 解くべき式 (4) は陰的スキームであることから擬似時間内部反復法<sup>6)</sup>を用い, 擬似時間の進行にはRRK法を用いた (詳細は文献<sup>6)</sup>を参照されたい). また, 各式における非粘性流束ベクトルの評価はRoeのFDS法<sup>7)</sup>を用い, MUSCL法にて高次精度化し, Venkatakrishnan<sup>8)</sup>により提案された制限関数を使用した.  $n+1/2$  段階についての流束は各時間段階の平均を取るものとした.

### 3. スキームの検証

まず本スキームが幾何保存則を満足しているかを検証するため, 時間ステップごとに格子点を追加・削除させた計算格子を用いて一様流の捕捉を行った.

計算領域は一辺の長さが2.0である正方形であり, 要素数は初期状態で450であるものを図4のように変化させた. 図5には各時間段階の格子状況を示す.

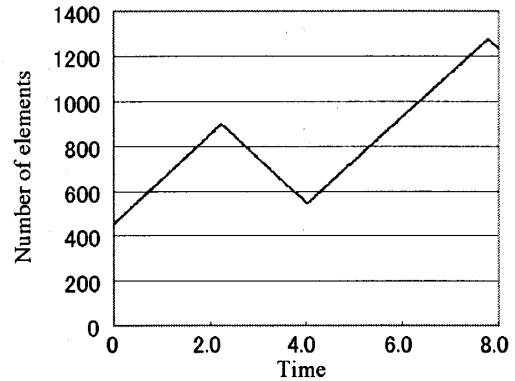


Fig.4 Time history of the number of elements

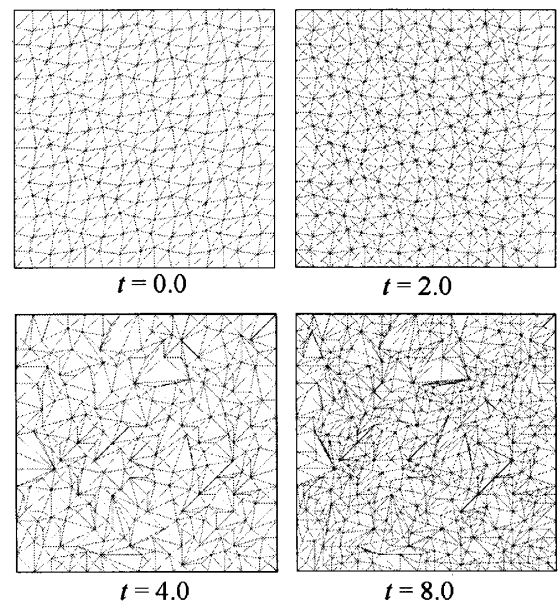


Fig.5 Change of grid

初期状態として, 全要素に一様流  $\rho_\infty=1.0, p_\infty=1.0/\gamma (\gamma=1.4), u=1.0, v=1.0$  を与え  $t=8.0$  (時間刻み幅 0.01 で 800 時間ステップ) まで計算を行った.

図 6 に密度に対する初期値との誤差履歴を示す. また誤差は式 (7) のように定義した. 結果, 初期値との誤差は  $10^{-14}$  (機械誤差) レベルであり, 他の物理量 (速度, 圧力) についても同様であったことから, 格子の追加および削除を行った本手法が幾何保存則を十分満足していることを確認することができる.

$$ERROR = MAX \left[ \left\{ \frac{\rho - \rho_{\infty}}{\rho_{\infty}} \right\}_i \right] \quad (7)$$

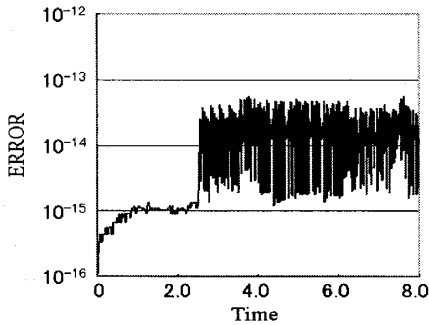


Fig.6 History of L2-ERROR of density

4. 実用問題への適用

4.1 物体移動時の格子再構築アルゴリズム

本手法を実用問題へ適用するにあたり、まず物体移動時における格子再構築のアルゴリズムについてその計算手順を記述する。

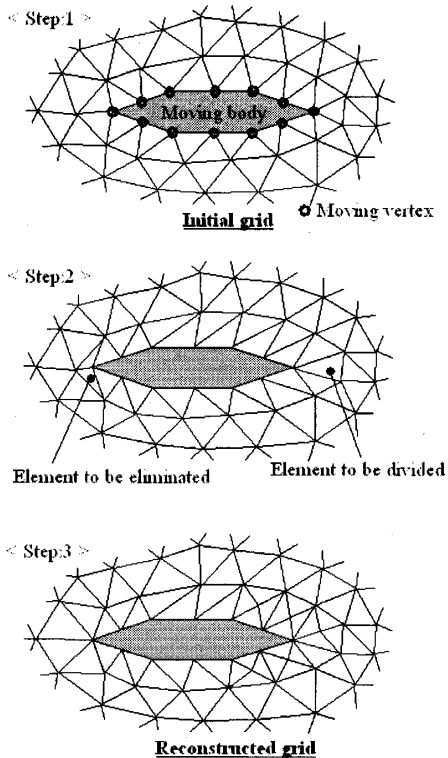


Fig.7 Reconstruction algorithm of grid

まず、図7<Step1>に示すように移動物体を形成する境界格子点をピックアップし、境界格子点を移動させる。移動後(<Step2>)物体周りの要素について、要素面積がユーザー指定値上限より大きくなったものは格子点を追加させることで要素を分割し、

また指定値下限より小さくなったものは格子点を削除することで要素を結合する。格子点の追加・削除・移動により極端に歪んだ要素が発生した場合にも適宜修正を行い、最終的に再構築した計算格子(<Step3>)を形成する。

4.2 ガンタンネル問題

本節では実用問題例として図8に示すようなガンタンネル問題へ本手法を適用する。これはピストンの左側に高圧気体を、右側に低圧気体をそれぞれ充填し、管内圧力によりピストンを移動させるものである。またピストンと上下壁間には開口率10%の隙間があり、流体がすり抜けると同時にピストンの動きが流体へも影響を及ぼす。本問題は、流体-物体連成問題であるので、実際の計算では擬似時間段階において、流れ場と流れによるピストンの動きを同期させながら解くこととなる。

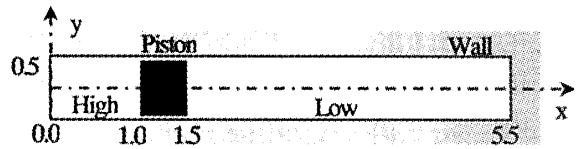


Fig.8 Gun tunnel problem

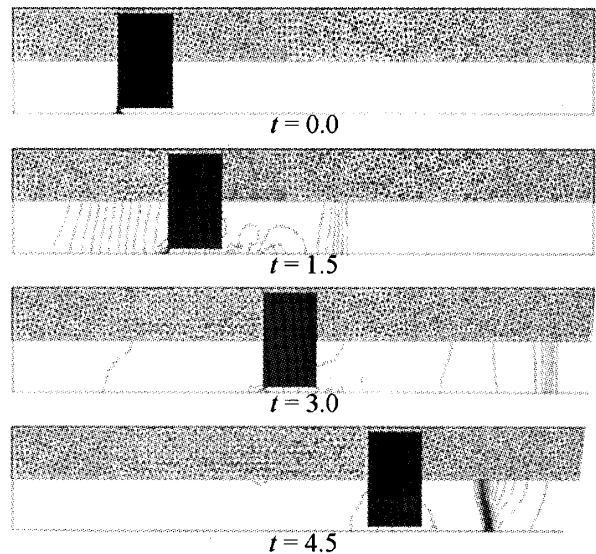


Fig.9 Grid and pressure contours for gun tunnel problem (Upper : Reconstructed grid, Lower : Pressure contours)

初期条件は、密度  $\rho_H = 1.0, \rho_L = 0.1$ , 圧力  $p_H = 1.0/\gamma, p_L = 0.1/\gamma$  ( $\gamma = 1.4$ ), 速度  $u = 0.0, v = 0.0$  を与え  $t = 5.0$  (時間刻み幅 0.00025 で 20000 時間ステップ) まで計算を行う。尚、ピストン密度は 2.0 とした。

計算結果を図9に示す。ピストンの移動に伴いピストン前方で発生した衝撃波が右端壁へ進み ( $t =$

15,  $t = 3.0$ ), 右端壁で反射した反射衝撃波がピストンへ返ってきている ( $t = 4.5$ ). またピストンの前方で逐次要素を削除, ピストンの後方では要素を追加し, 自動で格子を再形成させながら, 流れ場を問題無く計算できていることを確認出来る. 本ケースについては, ピストンの移動による要素面積が初期格子の最小値 (初期要素面積の最小値) の 0.6 倍以下に達した時, 要素の削除を行い, 要素面積が初期格子の最大値の 1.5 倍に達した時, 要素の追加 (要素の分割) を行った. また要素の歪みに対する修正は, 三角要素の二辺が共に  $40^\circ$  以下となった時, 最長辺にて隣接する要素を合わせた四角形について対角線の入れ替えを実施した.

非構造移動格子有限体積法を用いる場合 (重畳格子法等の保存則を無視した手法を使用しない場合) で, 格子の追加・削除を行わないのであれば, 通常計算領域に合わせて計算格子を伸縮させることとなる. これは例えば図 10 (b) 下段に示すような格子をあらかじめ配置し, ピストンの動きにあわせて, 図 10 (a) 下段や図 10 (c) 下段に示すような x 方向にのみ同比率で拡大縮小した計算格子を用いる. (本格子を用いた場合の計算結果については文献<sup>(9)</sup>に委ねる.)

格子の追加・削除を行った同要素数の計算格子 (図 10 各上段) と比較して, 前述の格子 (図 10 各下段) では領域によって格子の分解能が勝手に変化してしまうと共に, 極端に格子間隔が狭くなることでクーラン数の規制も受けることとなる. これに対し本手法 (格子の追加・削除を行うもの) では常に一定の格子バランスを得ることで分解能, クーラン数の面で安定した計算が可能となる.

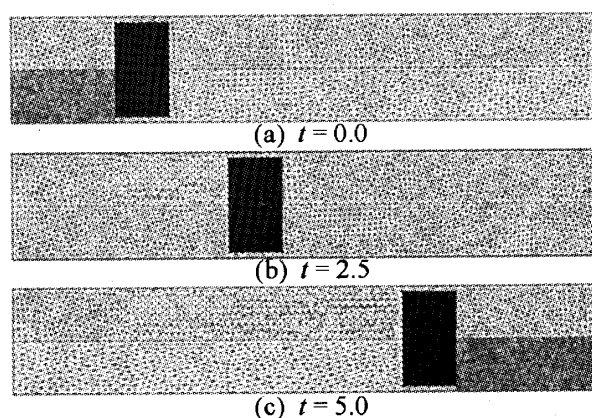


Fig.10 Comparison of grids

(Upper : With elimination/addition procedure,  
Lower : Using element elongation/shortening procedure)

**4.3 分離体を含む移動物体周りの流れ場への適用** 本非構造移動格子有限体積法の分離体を含む移動物体周りの流れ場への適用例として, 図 11 に示すような超音速ダクト内を移動する物体問題を取り扱う.

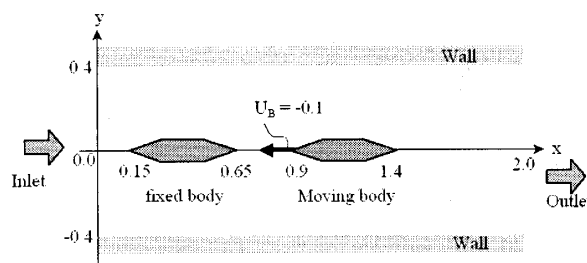


Fig.11 Calculation model

超音速 (流入マッハ数 = 2.0) で流入するダクト内に, 上流側に静止物体, 下流側に移動物体をそれぞれ配置する.  $t = 0.0$  より下流側の物体を速度 0.1 で上流側へ移動開始させ,  $t = 2.5$  で両物体が接触する.  $t = 2.5 \sim 5.5$  においては上流物体後部と下流物体前部の鋭角部を融合させる形で両物体を合体変形させる. その後, 計算開始時の上流側の物体と完全一致するまで, 物体の全長を短く変形させる.  $t = 7.5$  において一体化した物体は, 再び 2 物体へと分離させる. 分離時は, 物体の上下より亀裂を入れ, 初期の物体とは異なった形状で分離させ, 最終的に  $t = 10.0$  まで計算を行なうこととする.

計算の初期条件は初期状態での定常解を用い, 境界条件は流入側の各物理量を固定, 流出側は各物理量を外挿とした. また上下壁は反射条件とし, 計算領域は上下対称であるので上側半分とした. 初期状態での格子点数は 2000 (要素数 3805) である.

計算結果を図 12 に示す. 上流物体前方で発生した衝撃波は一旦壁面で反射した後, 形状を保ったまま留まっている. これに対し両物体間で発生した衝撃波は下流物体の動きに合わせて序々に前方に進み, 物体が一体化するにつれて衝撃波が消滅していくのを確認することができる. 上流物体前方で発生し壁面で反射した衝撃波は, 両物体間で発生した衝撃波により遮断されている ( $t = 2.0$ ) が, 後者の衝撃波が弱まるにつれて前者の衝撃波がこれを突き破る形に変化している ( $t = 5.5$ ). また, 物体の分離時には分離箇所から新たに弱い衝撃波が発生しており, 物体の合体時同様に衝撃波が移動・干渉を繰り返していることを確認することができる.

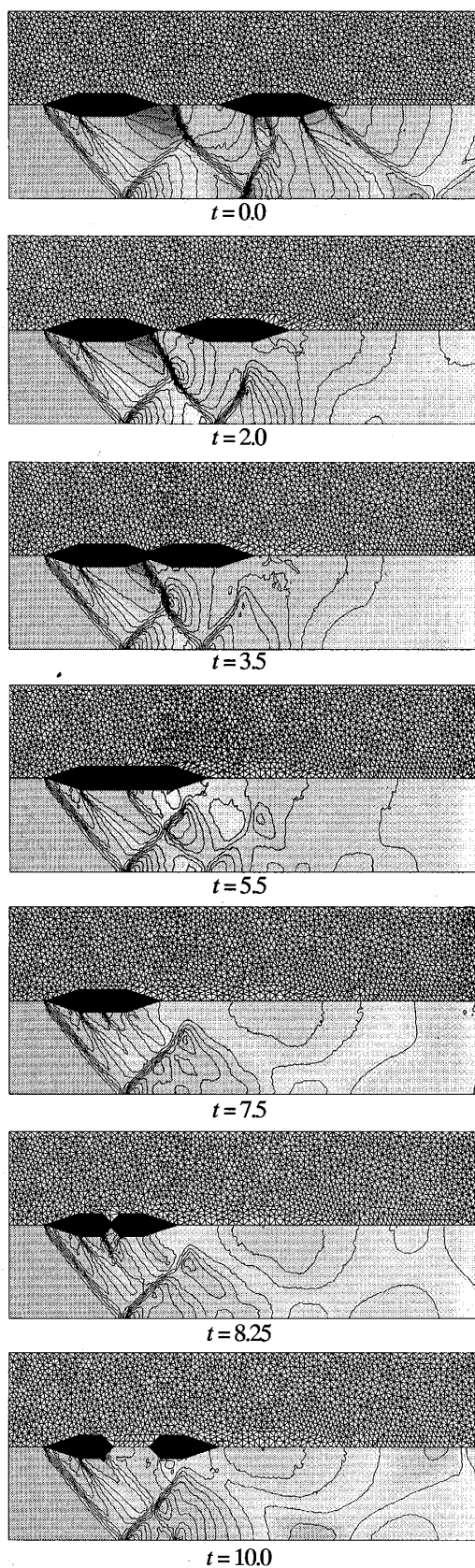


Fig.12 Two bodies docking and separation  
in supersonic flow  
(Upper : Grid, Lower : Pressure contours)

計算初期段階において両物体間には  $x$  方向に約 10 個の要素を配置していたが、物体の移動と共に要素の削除を繰り返し、合体時には両物体間の要素を完全に消去している。また物体の分離時には分離する物体間に逐次要素を追加しながら計算を行えている。結果、物体同士が分離合体する流れ場を単一の格子で保存則を満足したまま計算できることを示している。

## 5. 結論

分離合体を含む移動物体周りの流れ場を精度良く計算するため、非構造移動格子有限体積法を進展させ、幾つかの検証問題へ適用した結果以下の結論を得た。

- (1) 非定常流れにおいて、逐次格子点を追加・削除させても保存則を満たすよう非構造移動格子有限体積法を定式化した。
- (2) 時間と共に格子点数が変化する非構造格子上で一様流を正確に捕捉できていることから、今回発展させた非構造移動格子有限体積法が幾何保存則を満足できていることを確認した。
- (3) 物体が移動・分離・合体する時の格子再構築アルゴリズムを示し、単一格子上で保存則を満たしたまま分離合体を伴う物体周りの流れ場の計算手法を構築した。
- (4) 実問題として、ガンタンネル問題へ適用し、格子を自動で追加・削除させながら効率よく流れ場を計算できることを示した。
- (5) 超音速ダクト内を移動し、分離合体を行う物体周りの流れ場へ適用を行ったことで、本手法の有効性および将来性を示した。

## 参考文献

- (1) Kao, K. H., 他 2 名, *AIAA*, 93-3389-CP, (1993), 990-1001
- (2) 松野謙一, 数値流体力学会誌, 3-2(1995), 103-114
- (3) 三原清孝他 2 名, 機論, 65-637, B(1999), 2945-2953
- (4) 山川勝史他 1 名, 機論, 69-683, B(2003), 1577-1582
- (5) 松野謙一, 流体力講演会講演集 34, (2002), 177-180
- (6) C.L.Rumsey 他 4 名, *Comp. and Fluids*, 25, (1996), 217-236
- (7) Roe, P. L., *JCP*, 43(1981), 357-372
- (8) Venkatakrishnan V. (1993), *AIAA Paper* 93-0880