

非構造移動格子有限体積法*

(第1報, 非定常圧縮性流れに対する基礎的定式化と検証)

山川勝史*¹, 松野謙一*¹

An Iterative Finite-Volume Method on an Unstructured Moving Grid (1st Report, The Fundamental Formulation and Validation for Unsteady Compressible Flows)

Masashi YAMAKAWA*² and Kenichi MATSUNO

*² Dept. of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Gosyokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

Unstructured grid system is suitable for flows with complex boundary geometry's. As for the problem with moving boundary walls, the grid system is also changing and deforming with time. In this paper, a new moving-grid finite volume method on unstructured grid system is presented and developed for unsteady compressible flows. To assure geometric conservation laws on moving grid system, a control volume on the space-time unified domain is adopted for estimating numerical flux. The method is implicit and is solved iteratively at every time step in order to assure both the geometric conservation laws and numerical accuracy. The method is described for two-dimensional flows and validated using simple test problems. Application to a piston problem and a gun tunnel problem has shown a promising feature of the method.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Unsteady Flow, Unstructured Mesh, Finite Volume Method

1. 緒 論

計算流体力学は、特に定常流計算についてほぼ実用の域に達しており、現在研究の中心は非定常問題へ移りつつある。その中でも流体と物体が相対運動を伴うような物体変形問題/移動境界問題に対する研究が盛んに行われている。このような非定常問題を取り扱う場合、物体の変形や格子移動に対応して計算格子を変形/移動させる必要が生じる。特に圧縮性流体の場合、正確にランキン・ユゴニオ関係を満たすため保存則を保証することが重要となり、計算格子の変形/移動により変化するメトリックスの評価をいかに行うかがポイントとなる。具体的には流れの保存則と同様に幾何保存則^①を満足させる必要が生じる。これに対し著者らは構造格子を対象に移動格子有限体積法^②の構築を進めてきた。本手法は、空間-時間に跨るコントロールボリュームを用いた有限体積法により幾何保存則を満たすよう離散化を行い、解くべき陰的スキーム

に対し擬似時間内部反復法を用いることで本スキームを時間発展的に取り扱うものである。この擬似時間内部反復過程に、格子の移動再形成を組み込むことで前述の非定常移動格子問題を解くことが可能となる。

また著者らは格子の移動再形成段階に楕円型方程式を用いた解適合機能^③を付加させることで本手法をさらに発展させた解適合移動格子有限体積法^④を提案し、移動する衝撃波を非定常過程において少ない計算格子で高分解能に捕らえることに成功している。しかしながらこれらの手法は、計算領域の変化量が小さいもの等ある程度単純化された流れ場に限定して適用出来るものであり、任意形状物体周りや物体の剥離を伴うような複雑な移動境界問題については適用が困難であることから構造格子の限界もみえてきた。

一方、計算格子を形成する上で非構造格子は従来の構造格子と比較して、その自由度の高さから複雑な形状問題への適用が容易である。例えば構造格子では計算流体力学の専門知識をある程度要求される重畳格子や領域分割法等も、非構造格子ではほとんど必要無く、工学上の実用問題に対しその汎用性の高さから非常に重要な手法であるといえる。また格子の非構造性に起因する計算時間と記憶容量の増大

* 原稿受付 2002年10月16日。

*¹ 正員, 京都工芸繊維大学工芸学部(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E-mail: yamakawa@ipc.kit.ac.jp

についても、今日計算機の著しい高性能化、並列化により実用上遜色無いレベルまで到達したと言っても過言では無い。

本論文の目的は、移動格子有限体積法を非構造格子へ発展させることで、あらゆる複雑形状における非定常移動境界問題を高精度で計算できる手法を構築することにある。

本論文では、まず二次元非粘性圧縮性流れを対象に非構造移動格子有限体積法の定式化を示し、本スキームの検証を行う。次に実用問題としてピストン問題、ガントネル問題を取り上げ、本スキームの有効性を示す。

2. 非構造移動格子有限体積法

2・1 二次元オイラー方程式 二次元非粘性圧縮性流に対する無次元化されたオイラー方程式は、保存形表示で以下のように示せる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 ρ は密度、 p は圧力、 u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分、 e は単位体積当たりの全エネルギーである。比熱比が γ である理想気体を仮定すると、状態方程式を用いて e は次のように表すことができる。

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3)$$

2・2 幾何保存則を満たす離散化 非定常流れにおいて格子の変形/移動を行う際、流れを正確に計算させる為には空間の保存則と同様に時間空間についても考慮する必要がある。つまり幾何保存則 (Geometric Conservation Law: GCL) を満たすことが重要であり、その為には流れの基礎式に対する離散化段階にてこの GCL を考慮することが必要となる。ここでは文献²⁾による定式化を二次元を対象に示す。

いま式(1)を発散形表示すると次のように表すことができる。

$$\tilde{\nabla} \tilde{F} = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$\tilde{\nabla} = \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_t \frac{\partial}{\partial t} \quad (5)$$

$$\tilde{F} = E \bar{e}_x + F \bar{e}_y + q \bar{e}_t \quad (6)$$

であり、 $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_t$ は x, y, t 方向の単位ベクトルである。次に、図1に示すような空間-時間に跨る五面体のコントロールボリュームを考え、有限体積法を適用する。

次に、図1に示すような空間-時間に跨る五面体のコントロールボリュームを考え、有限体積法を適用する。

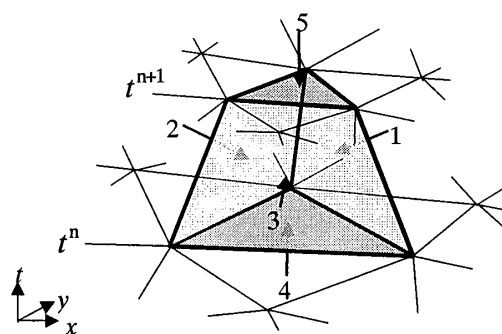


Fig.1 Control volume in space-time system

式(4)をこのコントロールボリュームについて体積積分し、さらにガウスの発散定理を用いて以下のように変形する。

$$\int_V \tilde{\nabla} \tilde{F} dV = \oint_S \tilde{F} \cdot n dS = \sum_{l=1}^5 (E n_x + F n_y + q n_t)_l = 0 \quad (7)$$

ここで $n_l = (n_x, n_y, n_t)_l$ ($l=1, 2, \dots, 5$)は五面体の l 番目の表面に対する外向き法線ベクトルであり、その長さは各表面の面積を表す。また第4面および第5面は時間軸に対し垂直であることから、式(7)は具体的に以下のように離散化される。

$$q^{n+1}(n_t)_5 + q^n(n_t)_4 + \sum_{l=1}^3 \left\{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot n_l \right\} = 0 \quad (8)$$

2・3 流束ベクトルの評価 本論文における非構造有限体積法はセル中心法を適用し、流束ベクトルの評価はRoeのFlux Difference Splitting法⁹⁾を用いる。空間高次精度化については、要素 i および要素 i に隣接する要素 j について、まず基礎物理変数 Q の再構築を勾配 ∇Q を用いて以下のように行う。

$$\begin{aligned} Q_{ij}^- &= Q_i + \Phi_i \nabla Q_i \cdot (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_i) \\ Q_{ij}^+ &= Q_j + \Phi_j \nabla Q_j \cdot (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla Q_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j \in i} \frac{1}{2} (Q_i + Q_j) \mathbf{n}_{ij} \Delta l_{ij} \quad (10)$$

ここで \mathbf{r} は位置ベクトルであり、 \mathbf{r}_{ij} は要素 i と要素 j の境界の位置ベクトルである。また \mathbf{n}_{ij} は要素 i からの外向き単位法線ベクトルであり、 Δl_{ij} は要素間の辺長さである。尚 Φ は制限関数でありここでは Venkatakrishnan⁶⁾により提案されたものを用いる。式 (8) における $n+1/2$ 段階についての流束は、例えば E について以下のように評価する。

$$E^{n+1/2} = (E^n + E^{n+1})/2 \quad (11)$$

2・4 擬似時間内部反復法 解くべき式 (8) は陰的スキームであることから、擬似時間内部反復法を用いる。いまオペレータを式 (12) のように定義すると、反復方程式として式 (13) を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} L(q^{n+1}) &= \frac{1}{\Delta t(n)_s} [q^{n+1}(n)_s + q^n(n)_s \\ &+ \sum_{i=1}^3 \{ \{ E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2} \} \cdot \mathbf{n}_i \}] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{dq^{n+1(v)}}{d\tau} = -L(q^{n+1(v)}) \quad (13)$$

ここで v は反復のインデックスであり、 τ は擬似時間に相当する。最終的には式 (13) に何らかの時間積分法、本論文では無条件安定な有理ルンゲ・クッタ法を適用し、 v を収束させることで次の時間ステップの解 q^{n+1} を得ることが出来る。

3. スキームの検証

まず本スキームが幾何保存則を満足しているかを検証するため、内点が式 (14) に定義される変形/移動格子を用いて一様流の捕捉を行った。

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + 0.3\Delta s \cos \theta \\ y_i &= y_0 + 0.3\Delta s \sin \theta \\ \theta &= \frac{\pi}{2} (x_0 + y_0) \frac{3}{40} N \end{aligned} \quad (14)$$

計算領域は一辺の長さが 2.0 である正方形で、格子点数は 256 (要素数 450) である。ここで N は時間ステップ、 Δs は初期格子 (図 2: $t=0.0$) において格子点と向かい合う辺の最短長さを示している。図

2 に各時間段階の格子の状況を示す。また、初期状態として全要素に一様流 $\rho_\infty=1.0, p_\infty=1.0/\gamma (\gamma=1.4), u=1.0, v=1.0$ を与え $t=10.0$ (時間刻み幅 0.01 で 1000 時間ステップ) まで計算を行う。

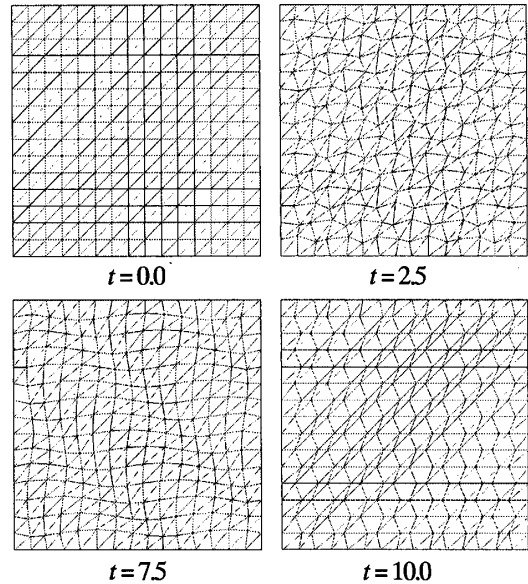


Fig.2 Moving grid

図 3 に密度に対する初期値との誤差履歴を示す。誤差の定義は式 (15) のように定義した。結果、初期値との誤差は 10^{13} (機械誤差) レベルであり、他の物理量 (速度、圧力) についても同様であったことから、幾何保存則を十分満足していることを確認することができる。

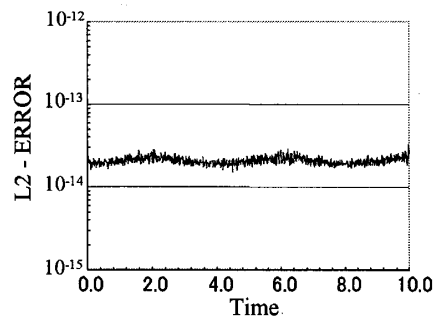


Fig.3 History of L2-ERROR of density

$$L2 - ERROR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i_{max}} (\rho - \rho_\infty)_i^2}{i_{max}}} \quad (15)$$

4. 実問題への適用

4・1 ピストン問題 二次元非粘性非構造移動格子有限体積法の実問題への適用として、図 4 に示すようなピストン問題を取り扱う。時刻 $t=0.0$ より

等加速度運動を行うピストンは、 $t = 0.1$ に速度 $u_p = 1.0$ に到達し、その後 $t = 1.2$ まで等速にて運動させ、最終的にピストン位置 $x = 1.15$ までの状態を計算する。

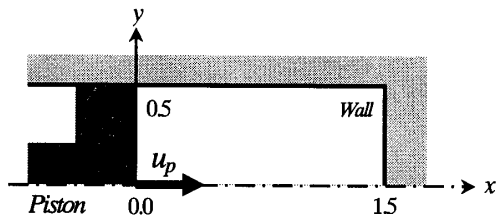


Fig.4 Piston problem

初期格子として図5に示すデローニー三角分割法にて生成したものをいい、ピストンの動きに合わせて各タイムステップ毎に格子点を移動させる。移動させる格子は、図6に示すように x 方向にのみ等比率で縮小し、各方向の位相および格子点数は変化せず、総格子点数は2000 (要素数3833) である。

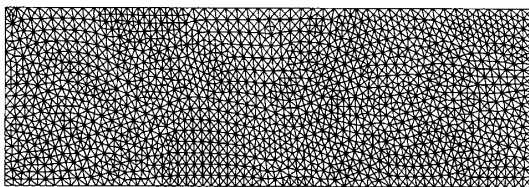


Fig.5 Initial grid

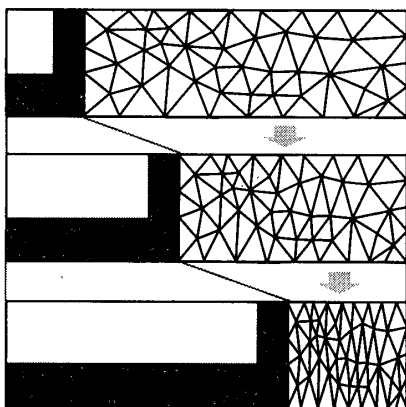


Fig.6 Image of moving grid

初期条件は、密度 $\rho = 1.0$, 圧力 $p = 1.0/\gamma$ ($\gamma = 1.4$), 速度 $u = 0.0, v = 0.0$ を与え $t = 1.2$ (時間刻み幅 0.00025 で 4800 時間ステップ) まで計算を行う。

計算結果 (等圧力線図 $\Delta p = 0.1$) を図6に示す。各擬似時間内部反復段階における収束判定条件は、各段階の初期変動値に対し 10^{-6} 以下に達した時とし、また収束までの内部反復回数は 10 回程度である。ピストンの進行に伴い発生した衝撃波が前方へ進み、 $t = 0.9$ 付近で端壁に反射し、戻ってくる様子を確認

することが出来る。尚、時間の経過と共に衝撃波が薄くなっているのは、計算格子が押し縮められ格子間隔が小さくなっているためである。

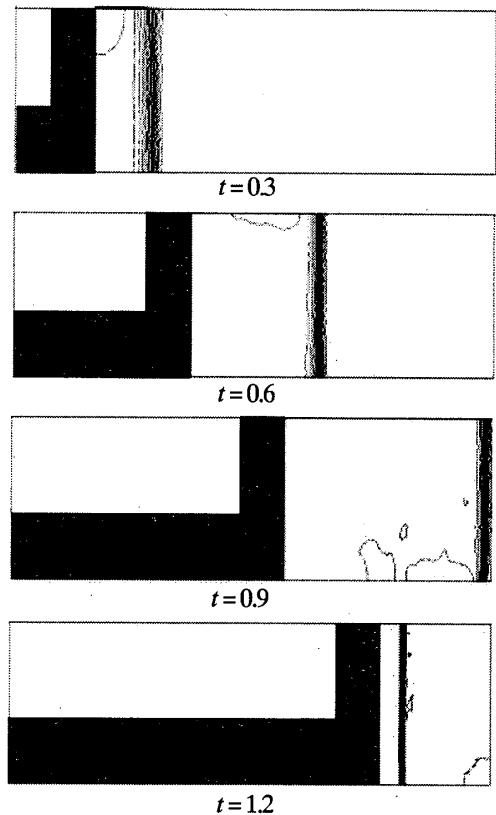


Fig.7 Pressure contours

図7に移動する衝撃波の位置に対する計算値と理論値⁶⁾の比較を示す。各点における両者の誤差量は 0.9% ~ 1.3% 程度であり理論精度内で十分良好な結果が得られているといえる。

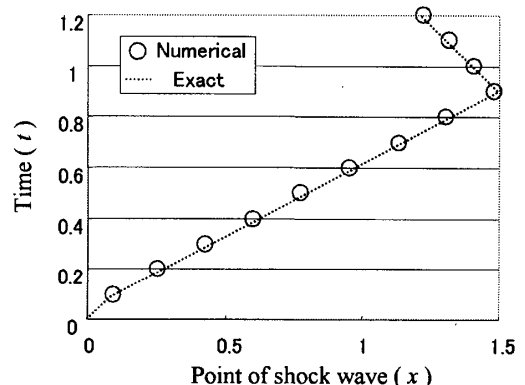


Fig.8 Comparison of the position of shock wave

4.2 ガンタンネル問題 本節では別の実問題例として図9に示すようなガンタンネル問題へ本スキームを適用する。本問題はピストンの左側に高圧気

体を、右側に低圧気体をそれぞれ充填し、管内圧力によりピストンを移動させるものである。

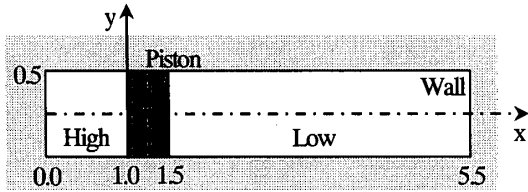


Fig.9 Gun tunnel problem

初期条件は、密度 $\rho_H=10.0, \rho_L=1.0$, 圧力 $p_H=10.0/\gamma, p_L=1.0/\gamma (\gamma=1.4)$, 速度 $u=0.0, v=0.0$ を与え $t=6.0$ (時間刻み幅 0.0005 で 12000 時間ステップ) まで計算を行う。尚、ピストン密度は 2.0 とした。計算条件は、ピストンと管との隙間の有無 (開口率 0%, 10%) 2 ケースについて実施した。計算格子 (開口率 0%) を図 10 に示す。上段が初期状態の格子であり、下段が最終状態での格子である。ピストン前後の格子数は同程度であり、ピストン問題同様 x 方向にのみ同比率で縮小/拡大したものを配置し、トータルの要素数は 3735 である。

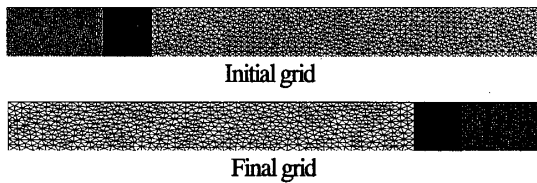


Fig.10 Calculation mesh for gun tunnel problem

また本問題は流体と物体との連成問題である為、その計算アルゴリズムを図 11 に示す。

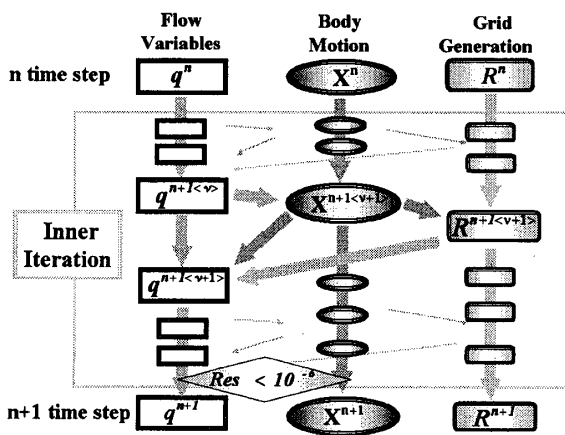


Fig.11 Calculation algorithm

本計算は、n 段階から n+1 段階に進む内部反復過程において、相互依存する流れの物理量 q 、ピスト

ン位置 X および計算格子 R を同期させながら解くことになる。つまり内部反復過程の v 段階において流れの中の圧力がピストンに力を及ぼし、ピストンが動くことで計算格子を変形させると共に、ピストン壁面流速の変化が流れに影響を与える。そして最終的に指定した収束判定をクリアした段階で次のステップへ進むことになる。

計算結果 (等圧力線図 $\Delta p = 0.04$) を図 12 に示す。各時間ステップにおける上段が開口率 0%、下段が開口率 10%の結果を示している。

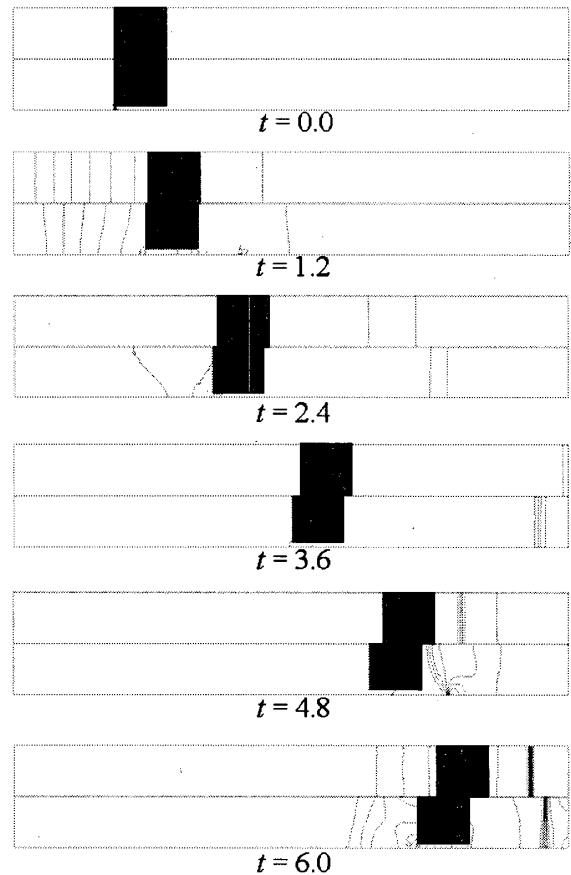


Fig.12 Pressure contours

ピストン左室の高圧気体によりピストンが右側へ推し進められ、この影響でピストン右室は徐々に圧縮されると共に、ピストン前方に衝撃波が発生しているのを確認することが出来る。衝撃波はピストン壁と端壁の間にて反射を繰り返しながら、ピストン右室の圧力を上昇させている。図 12 においてピストンと管との間に隙間の無い Case1 (上段) と比較して隙間がある Case2 (下段) では、隙間からのエア漏れこみにより左右の管内圧力差を減少させることで、ピストンへ掛かる圧力を低下させ、結果的にピストンは移動量を小さくなっている。

この流れ状況を図13に定量的にグラフ化する。横軸に時間経過を、縦軸にピストンに掛かる圧力値(左右のピストン壁面での圧力差)およびピストンの移動量を示している。また実線が Case1 を、破線が Case2 を示している。

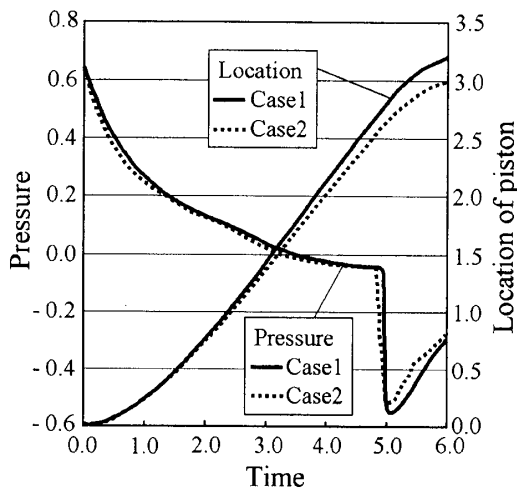


Fig.13 Pressure value and location of piston

圧力値は $t = 3.1$ 辺りまで正であり、ピストンを右向きに加速させており、その後徐々に減速させている。また $t = 5.0$ 付近で急激に圧力が落ち込んでいるのは、ピストン前方で発生した衝撃波がピストン壁へ反射したことによるものである。Case2 はピストンと管との隙間からのエア漏れにより Case1 と比較して圧力値の変化量が若干緩和されており、その影響で、ピストン移動量は最終的に約 7% 小さくなっていることを確認できる。このことから本スキームが物体-流体の連成問題に対しても問題なく計算できており、本手法の有効性および拡張性を示していると考えられる。

5. 結論

本論文では、非定常移動境界問題を対象に複雑形状へ対応できるよう移動格子有限体積法を非構造格子へ発展させた非構造移動格子有限体積法を提案し、いくつかの検証問題へ適用した結果、以下の結論を得た。

- (1) 非構造格子に対して、格子点の移動/変形を伴う非定常流れで完全に幾何保存則を満たす定式化を行った。
- (2) 強制的に格子の移動/変形を行った計算領域上での一様流を正確に捕捉出来ていることから、本スキームが幾何保存則を満足していることを確認した。
- (3) 移動境界問題としてピストン問題を取り上げ、非構造格子においても衝撃波の移動現象を正確に計算できていることを確認した。また、上記衝撃波の発生位置について理論値と比較した結果 0.9% ~ 1.3% の誤差内に収まり、本手法の信頼性を示した。
- (4) 物体-流体連成問題としてガンタンネル問題へ適用した結果、妥当な結果が得られたことから、本スキームの有効性および拡張性を示した。

参考文献

- (1) 松野謙一, 数値流体力学会誌, 3-2(1995), 103-114
- (2) 三原清孝他 2 名, 機論, 65-637, B(1999), 2945-2953
- (3) 山川勝史他 2 名, 機論, 62-599, B(1996), 2640-2645
- (4) 佐藤泰啓他 3 名, 機論, 67-653, B(2001), 23-28
- (5) 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法(1995), 123-17
東京大学出版会
- (6) Venkatakrishnan V. (1993), AIAA Paper 93-0880
- (7) 谷口健男, FEM のための要素自動分割(1992), 森北出版株式会社
- (8) 生井武文他 1 名, 衝撃波の力学(1983), コロナ社