

フレネルの影と影理論 Fresnel Shadow and Shadow Theory

中山 純一
Junichi Nakayama

京都工芸繊維大学 名誉教授
Professor Emeritus, Kyoto Institute of Technology
E-Mail: nakayama_jun@m.ieice.org
(2009年4月30日原稿受理、2009年6月5日採用決定)

サマリー：平面電磁波が無限に広く平坦な2媒質境界に入射するとき、フレネル反射が起きる。低入射角の極限 (grazing 入射) では、フレネル反射係数が -1 になり、反射波によって入射波がうち消され全波動場は「真っ黒な影」になる。このような低入射角の極限における「影」は、移動不変性を持つ表面・構造 (平坦な境界面、多層膜、周期表面、ランダム表面、ランダム薄膜) による散乱に共通する性質であることが経験的に知られているが、詳しい議論はなされてこなかった。本稿では、このような「影」についての考察を試み、同時に、影を用いた反射と回折の理論の定式化について述べる。2媒質境界によるフレネル反射の問題と完全導体周期表面による回折問題について具体的に議論している。

キーワード：反射係数、回折振幅、散乱因子、影理論、素励振

1 はじめに

海面や地表面は不規則な凹凸を持つため、不規則表面からの電磁波散乱問題は、レーダーリモートセンシング技術の基盤として重要である。この散乱問題は古くから研究されてきたが^{1)–3)}、厳密解を構成すること、適応範囲の広い近似解を構成することなどは未解決である。筆者らは、1980年に確率過程の概念を用いた解析法⁴⁾を提案し、表面荒さが小さい場合の近似解を構成した^{5)–7)}。一般に不規則表面に平面波が入射するとき、全ての方向への散乱 (乱反射) と鏡面反射が発生する。しかし、著者らの近似解には奇妙な性質があり、入射角が grazing になると乱反射が消滅し鏡面反射だけになる。しかも、反射係数が -1 であるため、入射波は反射波によってうち消される。このため、入射波と反射波の和としての全電磁界は消滅し、物理的には真っ黒な影となる。grazing 入射におけるこの奇妙な性質の正否は長年の疑問であった。

一方、1970年以後、回折格子 (周期表面) の数値解析が活発に行われた。多くの数値計算結果は、grazing に近い入射に対しては、0次の回折効率がほぼ1になり、0次以外の回折効率はほぼ0となることを示した^{8)–11)}。しかし、その物理的意味についての議論はなされなかった。その原因の一つは、従来の回折理論には欠点があり、grazing 入射における回折効率は数値計算できないためである。

他方、新たな解析手法として Grazing 摂動法を導入して、Charnotskii¹²⁾は今世紀の始め周期格子による回折の解析的近似解を構成した。十分小さい roughness をもつ周期格子に平面波が grazing 入射するとき、Grazing 摂動法による近似解では回折現象が消滅し反射係数 -1 をもつ反射波だけになる。これは、全電磁界が消滅し物理的には真っ黒な影となることを意味する。

これらの結果から、著者らはこの特異な影の現象が一般的に起きると予測した。新たに変形回折振幅の概念を導入して、この予測が深い溝を持つ周期格子でも成立することを例示した¹³⁾⁻¹⁵⁾。さらに、変形回折振幅の概念をもとに、新たに回折格子の影理論を提案した¹⁶⁾。山北等により影理論の誘電体格子への応用も検討されているが¹⁷⁾¹⁸⁾、影の物理的本質の把握は未だ手探りの状態である。

しかし、grazing 入射における特異性はフレネル反射の性質でもある。平坦な 2 媒質境界におけるフレネル反射係数は、grazing 入射の時、入射偏波や媒質定数に無関係に厳密に -1 になる。これは、古くからよく知られている性質である。反射係数が -1 となるため、「入射波は反射波によって打ち消される」と前田¹⁹⁾は指摘している。grazing 入射においては、透過係数も 0 となるため、全空間での電磁波は消滅し物理的に影となる。

このような grazing 入射における「影」は、移動不変性を持つ表面・構造（平坦な境界面¹⁹⁾、周期表面⁸⁾⁻¹¹⁾、不規則表面⁵⁾⁻⁷⁾、ランダム薄膜²⁰⁾⁻²²⁾）による散乱に共通するとの経験的事実がある。しかし、周期表面、不規則表面、ランダム薄膜の場合には、厳密解を得ることが困難である。そこで、本稿では、厳密解が得られるフレネル反射の問題を手がかりとしてフレネルの影についての物理的考察を行い、同時に影を用いた理論の定式化について検討する。さらに、完全導体周期表面による回折に現れる影について考察し、影を用いた回折理論の定式化について議論する。

本稿では、時間因子 $e^{-i\omega t}$ をもつ単色波の場合だけを議論している。

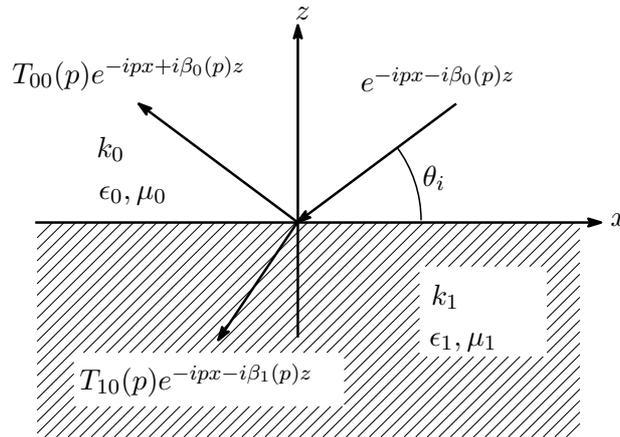


図 1: 二媒質境界 ($z = 0$) による平面波の反射と透過。 $z > 0$ である半空間が領域 0, $z < 0$ の半空間が領域 1 である。 k_0 と k_1 は、それぞれ領域 0 と 1 における波数。入射角 θ_i は x 軸から計測する。 $T_{00}(p)$ はフレネル反射係数、 $T_{10}(p)$ は透過係数。

2 フレネル反射係数と影形成

フレネルの影を考察するため、良く知られたフレネル反射の問題を考えよう(図1)。 y 方向に一様な構造を考えるので、2次元問題となり、電磁界はTE(transverse electric)とTM(transverse magnetic)の2つの組に分かれる。以下では、磁界が y 成分 H_y だけをもち、電界が x 成分 E_x と z 成分 E_z だけをもつTM波の場合を議論する。

図1において、 $z = 0$ なる平面が2媒質境界である。媒質 $m, (m = 0, 1)$, における複素誘電率を ϵ_m 、透磁率を μ_m とすると、媒質 m における波数 k_m は

$$k_m = \omega \sqrt{\epsilon_m \mu_m}, \quad (m = 0, 1) \quad (1)$$

となる。以下では議論を簡単にするため、媒質は無損失で k_0 と k_1 は実数であり、また、

$$\epsilon_1 > \epsilon_0 > 0, \quad \mu_1 = \mu_0 \quad (2)$$

であるとする。次に補助関数 $\beta_m(p)$ を導入する。実数 p に対して、 $\beta_m(p)$ を

$$\beta_m(p) = \beta_m(-p) = \begin{cases} \sqrt{k_m^2 - p^2} & |p| \leq k_m \\ i\sqrt{p^2 - k_m^2} & |p| > k_m \end{cases}, \quad (3)$$

$$\text{Re}[\beta_m(p)] \geq 0, \quad \text{Im}[\beta_m(p)] \geq 0, \quad (m = 0, 1). \quad (4)$$

で定義する。ここで Re と Im はそれぞれ実部、虚部を表す。明らかに、 $\beta_m(p)$ は実数であるか、純虚数である。

媒質 m における磁界の y 成分を $H_y^{(m)}$ と書く。TM波の場合、付録Aの(76)(77)により $H_y^{(m)}$ から電界成分 $E_x^{(m)}$ と $E_z^{(m)}$ が計算できる。磁界の y 成分はヘルムホルツの方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_m^2 \right] H_y^{(m)}(x, z) = 0, \quad (5)$$

を満たし、境界上($z = 0$)で境界条件

$$H_y^{(0)}(x, 0) = H_y^{(1)}(x, 0), \quad \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z}, \quad (6)$$

を満たす。入射平面波を

$$H_{yi}^{(0)}(x, z) = h_0 e^{-ipx - i\beta_0(p)z}, \quad p = k_0 \cos \theta_i \quad (7)$$

とする。ここで、 h_0 は入射磁界の振幅、 θ_i は入射角で x 軸から測る(図1)。grazing入射とは、 $\theta_i = 0$ または $\theta_i = \pi$ の状態を意味し、幾何学的配置からこの状態を低入射角極限と呼ぶ。以下では、 p が実数の場合だけを考える。(7)は $-pe_x - \beta_0(p)e_z$ 方向に伝搬する平面波であるが、 $\beta_0(p)$ が純虚数のときには、 $-z$ 方向に減衰するエバネセント波となる。ただし、 e_x と e_z はそれぞれ x 方向、 z 方向を表す単位ベクトルである。また、低入射角の極限($\theta_i \rightarrow 0, \pi$)では、

$$\beta_0(p) = k_0 \sin \theta_i \rightarrow 0, \quad (p = k_0 \cos \theta_i \rightarrow \pm k_0) \quad (8)$$

が成り立つ。以下の議論ではこの性質を用いる。

入射波の x 依存性が e^{-ipx} であるので、媒質 0, 1 における磁界成分 $H_y^{(0)}(x, z)$ と $H_y^{(1)}(x, z)$ も同じ x 依存性をもつ。そこで、 $H_y^{(0)}(x, z)$ と $H_y^{(1)}(x, z)$ を次式の形に表現する。

$$H_y^{(0)}(x, z) = h_0[e^{-ipx-i\beta_0(p)z} + T_{00}(p)e^{-ipx+i\beta_0(p)z}], \quad (9)$$

$$H_y^{(1)}(x, z) = h_0T_{10}(p)e^{-ipx-i\beta_1(p)z} \quad (10)$$

これらは (5) を満たす。(9) 右辺第 2 項は上向きに伝搬する反射波であり、 $T_{00}(p)$ はフレネル反射係数である。ただし、TM 波を議論する本論文では、入射波の磁界と反射波の磁界の比として反射係数を定義している。(10) は、媒質 1 を下向きに伝搬する透過波であり、 $T_{10}(p)$ は透過係数である。特に、 $p = k_0$ で $\beta_0(k_0) = 0$ となる低入射角極限では

$$H_y^{(0)}(x, z) = h_0[1 + T_{00}(k_0)]e^{-ik_0x}, \quad (11)$$

$$H_y^{(1)}(x, z) = h_0T_{10}(k_0)e^{-ik_0x}, \quad (12)$$

となる。後に $[1 + T_{00}(k_0)]$ と $T_{10}(k_0)$ について考える。

次に、付録 A の (76)(77) を用いて電界成分を計算する。磁界 (9) に対応する電界は、

$$E_x^{(0)} = \frac{h_0\beta_0(p)}{\omega\epsilon_0}[T_{00}(p)e^{i\beta_0(p)z} - e^{-i\beta_0(p)z}]e^{-ipx} \quad (13)$$

$$E_z^{(0)} = \frac{h_0p}{\omega\epsilon_0}[e^{-i\beta_0(p)z} + T_{00}(p)e^{i\beta_0(p)z}]e^{-ipx} \quad (14)$$

となる。領域 1 での電界は、(10) から

$$E_x^{(1)} = -\frac{h_0\beta_1(p)}{\omega\epsilon_1}T_{10}(p)e^{-ipx-i\beta_1(p)z} \quad (15)$$

$$E_z^{(1)} = \frac{h_0p}{\omega\epsilon_1}T_{10}(p)e^{-ipx-i\beta_1(p)z} \quad (16)$$

また、媒質 m におけるポインティングベクトルの z 成分 $P_z^{(m)}(p) = \text{Re}[E_x^{(m)}H_y^{(m)*}]$ を計算すれば

$$P_z^{(0)}(p) = P_z^{(1)}(p) \quad (17)$$

$$P_z^{(0)}(p) = \frac{|h_0|^2}{\omega\epsilon_0}\{[\text{Re}[\beta_0(p)](|T_{00}(p)|^2 - 1) - 2\text{Im}[T_{00}(p)]\text{Im}[\beta_0(p)]\}, \quad (18)$$

$$P_z^{(1)}(p) = -\frac{|h_0|^2|T_{10}(p)|^2}{\omega\epsilon_1}\text{Re}[\beta_1(p)] \quad (19)$$

ここで、* は複素共役を表し、また、(17) はエネルギー保存則を表す。

(9) と (10)、(6) を用いると簡単な計算により、よく知られた関係式

$$T_{00}(p) = \frac{\beta_0(p)/\epsilon_0 - \beta_1(p)/\epsilon_1}{\beta_0(p)/\epsilon_0 + \beta_1(p)/\epsilon_1} \quad (20)$$

$$T_{10}(p) = \frac{2\beta_0(p)/\epsilon_0}{\beta_0(p)/\epsilon_0 + \beta_1(p)/\epsilon_1} \quad (21)$$

が得られる。ある p に対して分母が 0、つまり

$$D(p) = \beta_0(p)/\epsilon_0 + \beta_1(p)/\epsilon_1 = 0 \quad (22)$$

となれば、 $T_{00}(p)$ と $T_{10}(p)$ が無限大になる。この発散は導波モードの存在を表し、(22) は導波モードの伝搬定数 p を決定する横方向共振条件となる。実の p に対して、この条件 (22) が成立しないとき、(20)(21) は反射係数と透過係数の一意的な解である。しかし、媒質 1 が完全導体で複素誘電率が $\epsilon_1 = i\infty$ の場合、(22) は、

$$D(p) = \beta_0(p)/\epsilon_0 = 0 \quad (23)$$

となる。 $\beta_0(\pm k_0) = 0$ であるので、 $p = k_0 \cos \theta_i = \pm k_0$ のとき、横方向共振条件 (23) が成立する。すなわち、完全導体表面上には伝搬定数 $p = \pm k_0$ を持つ導波モードが存在する (図 2 参照)。この単純な事実を指摘するにとどめ、以下では媒質 1 が完全導体の場合を議論しない。

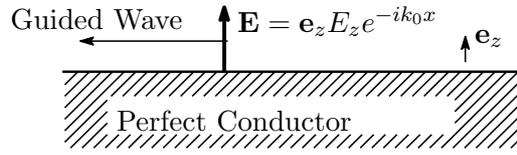


図 2: 完全導体の平坦面上を $-x$ 方向に伝搬する導波モード。 e_z は z 方向を表す単位ベクトルである。

次に、反射係数 $T_{00}(p)$ と透過係数 $T_{10}(p)$ の性質について議論する。(20)(21) により、低入射角極限 ($\beta_0(p) = 0$) では反射係数 $T_{00}(p)$ が -1 になり透過係数 $T_{10}(p)$ が 0 になる。すなわち、

$$\lim_{p \rightarrow \pm k_0} [T_{00}(p) + 1] = \lim_{p \rightarrow \pm k_0} T_{10}(p) = 0 \quad (24)$$

これと (11)(12) により $H_y^{(0)}$ と $H_y^{(1)}$ は恒等的に 0 になる。このため、低入射角極限 (8) では、入射平面波は反射波によって打ち消されると解釈されてきた¹⁹⁾。また、 $E_x^{(0)}$ と $E_z^{(0)}$ 、 $E_x^{(1)}$ と $E_z^{(1)}$ も恒等的に 0 になる。さらに、(18)(19) により、 z 方向へのエネルギーの流れも 0 となる。すなわち、全空間での電磁界が恒等的に 0 になり、物理的には真っ黒な影となる。本稿ではこのような影を「フレネルの影」という。

2.1 縮退

理論的には、(9) は場の完全な表現ではない。数学的には入射波 $e^{-ipx - i\beta_0(p)z}$ と反射波 $e^{-ipx + i\beta_0(p)z}$ は、 $\beta_0(p) \neq 0$ なら、独立した解である。しかし、低入射角極限 (8) で $\beta_0(p) = 0$ のとき、これらは縮退し物理的にも区別できない。

縮退する場合を議論するため、 $p = k_0$ と置いて変数分離解

$$H_y^{(0)}(x, z) = e^{-ik_0 x} v^{(0)}(z) \quad (25)$$

を求めよう。この場合、(5) は常微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2} v^{(0)}(z) = 0 \quad (26)$$

に帰着する。この微分方程式の2つの独立した解は、 $v^{(0)}(z) = 1$ と $v^{(0)}(z) = z$ であるから、 $H_y^{(0)}(x, z)$ は

$$H_y^{(0)}(x, z) = e^{-ik_0x}[Az + S] \quad (27)$$

の形になる。ここで、 A と S は任意の定数である。 A が0でなければ、この解は無限遠点 ($z = \infty$) で発散する。また、エネルギーの流れは

$$P_z^{(0)} = \frac{1}{\omega\epsilon_0} \text{Re}[SA^*] \quad (28)$$

となる。 $S = 0$ の場合、 $H_y^{(0)}(x, z)$ は $-x$ 方向に伝搬する非一様 TM 波となる。 $P_z^{(0)} = 0$ であるので、非一様 TM 波は z 方向にエネルギーを運ばない。また、 $A = 0$ の場合、 $H_y^{(0)}(x, z)$ は $-x$ 方向に伝搬する TEM 波となるが、やはり、 $P_z^{(0)} = 0$ となる。非一様 TM 波も TEM 波も、単独では z 方向にエネルギーを運ばない。しかし、(28) は、非一様 TM 波と TEM 波の干渉効果として z 方向へのエネルギーの流れ $P_z^{(0)}$ が現れることを意味している。

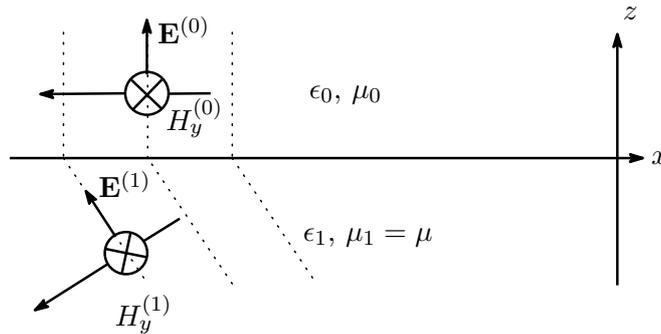


図 3: Snell の法則によれば、上の領域 0 で $-x$ 方向の伝搬する TEM 波があれば、下の領域 1 には左下方向に伝搬する TEM 波が存在する。この図は、上の領域では電界 \mathbf{E} は x 成分を持たないが、下の領域では電界 \mathbf{E} は x 成分を持つことを表す。境界面上では電磁界の接線成分が連続でなければならないので、 $E_x^{(1)} = E_x^{(0)} = 0$ となる。このため、 $\mathbf{E}^{(1)} = 0$ 、 $H_y^{(1)} = 0$ となる。再び、境界面上での電磁界の接線成分の連続性から、 $\mathbf{E}^{(0)} = 0$ 、 $H_y^{(0)} = 0$ となる。このため、この図のような状態は物理的にあり得ない。

2.2 フレネルの影：スネルの法則

「フレネルの影」は、どのような物理的メカニズムで発生するのだろうか。次にこの問題について考察しよう。以下では、 $p = k_0$ の場合に限定して議論を進める。

媒質 0 では、2つの TEM 波の和としての TM 波が存在し、電界は $E_x^{(0)}$ と $E_z^{(0)}$ の2成分を持つ。しかし、 $p = k_0$ で $\beta_0(p) = 0$ の場合は例外であり、(13) により $E_x^{(0)} = 0$ となる。すなわち、 $-x$ 方向へ伝搬する TEM 波となる。仮定 (2) により $\beta_1(k_0) > 0$ であるので、スネルの法則により媒質 1 の磁界 $H_y^{(1)}$ は左下に伝搬する TEM 波となる (図 3 参照)。媒質 1 において、このような TEM 波が有

$$\begin{aligned}
& \underbrace{e^{-ipx-i\beta_0(p)z}}_{\text{incident plane wave}} + \underbrace{T_{00}(p) e^{-ipx+i\beta_0(p)z}}_{\text{reflected wave (FRC)}} \\
&= \underbrace{e^{-ipx-i\beta_0(p)z}}_{\text{primary excitation}} - \underbrace{e^{-ipx+i\beta_0(p)z}}_{\text{SFRW}} + \underbrace{[T_{00}(p) + 1] e^{-ipx+i\beta_0(p)z}}_{\text{modified reflected wave (MRC)}} \\
&= \frac{2\beta_0(p)}{k_0} \left[\underbrace{k_0 e^{-ipx} \frac{e^{-i\beta_0(p)z} - e^{i\beta_0(p)z}}{2\beta_0(p)}}_{\text{elementary excitation}} + \underbrace{S(p) e^{-ipx+i\beta_0(p)z}}_{\text{ERW (SF)}} \right] \\
& \hspace{10em} \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{elementary field}}
\end{aligned}$$

図 4: 影理論の基本概念と用語。最初 (1 行目) は、入射波と反射波の和であり、 $T_{00}(p)$ は Fresnel reflection coefficient(FRC) である。2 行目では、入射波から振幅 1 の反射波を引き、同時に第 2 項に振幅 1 の反射波を加える。ここで、振幅 -1 を持つ反射波を Shadow forming reflected wave (SFRW) と呼び、 $[T_{00}(p) + 1]$ を Modified reflection coefficient(MRC) と言う。3 行目が影理論での表現で、共通因子 $2\beta_0(p)/k_0$ を括りだしたものである。 $S(p)$ を Scattering factor(SF), 角括弧内の第 2 項を elementary reflected wave(ERW) と言う。

限振幅で存在するためには、媒質 0 からエネルギーの供給がなければならない。しかし、(18) により $P_z^{(0)}(k_0) = 0$ となるので、そのようなエネルギーの供給はない。このため、媒質 1 には TEM 波が存在できない。すなわち、恒等的に $H_y^{(1)} = 0$ となる。このことと、境界面 ($z = 0$) での電磁界の連続性により、媒質 0 においても恒等的に $H_y^{(0)} = 0$ が成り立ち、結果として入射波が反射波によって打ち消されるとの現象が低入射角極限で起こる。

次に、この問題を幾何学的に議論する。図 3 から明らかなように、もし下の媒質 1 に TEM 波が存在すれば、電界の x 成分を持つ。一方、媒質 0 の TEM 波は E_x 成分を持たない。電界の接線成分 (E_x 成分) が境界で連続であるためには、 $E_x^{(1)}$ は 0 でなければならない。このことから、下の領域 1 で電磁界が恒等的に 0 となる。さらに、電磁界の連続性により上の領域 0 でも電磁界が恒等的に 0 となる。

2.3 影理論による定式化

影理論は、平面電磁波が移動不変な表面・構造に低入射角で入射するとき、「フレネルの影」が発生すると仮説から出発する (図 4 参照)。変形反射係数 $[T_{00}(p) + 1]$ を導入し、

$$T_{00}(p) = -1 + [T_{00}(p) + 1] \quad (29)$$

と置き、低入射角極限で変形反射係数 $[T_{00}(p) + 1]$ が 0 になることを期待する。この関係を用いて (9) を書き直せば

$$H_y^{(0)}(x, z) = h_0 e^{-ipx-i\beta_0(p)z} - h_0 e^{-ipx+i\beta_0(p)z} + h_0 [T_{00}(p) + 1] e^{-ipx+i\beta_0(p)z} \quad (30)$$

となる。右辺第2項は反射係数 -1 をもつ反射波であり、 $\beta_0(p) = 0$ のとき第一項の入射波を打ち消すので、影形成反射波と呼ぶ。また、第一項と第2項の和を1次励振 (primary excitation)、第3項を変形反射波と呼ぶ。影理論では、1次励振 (primary excitation) が変形反射波を励振すると考える。容易に、primary excitation は因子 $\beta_0(p)$ を持つことが分かる。

$$h_0 e^{-ipx - i\beta_0(p)z} - h_0 e^{-ipx + i\beta_0(p)z} = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} \left[-ik_0 h_0 \frac{\sin\{\beta_0(p)z\}}{\beta_0(p)} e^{-ipx} \right] \quad (31)$$

ここで、 $\beta_0(p) = 0$ のとき、 $\sin\{\beta_0(p)z\}/\beta_0(p) = z$ であると解釈する。また、右辺 [] の因子を elementary excitation (素励振) と呼ぶ。elementary excitation は

$$-ik_0 h_0 \frac{\sin[\beta_0(p)z]}{\beta_0(p)} e^{-ipx} = h_0 k_0 \frac{e^{-ipx - i\beta_0(p)z}}{2\beta_0(p)} - h_0 k_0 \frac{e^{-ipx + i\beta_0(p)z}}{2\beta_0(p)} \quad (32)$$

となり、振幅 $h_0 k_0 / 2\beta_0(p)$ を持つ入射波と反射波の差である。 $\beta_0(p) = 0$ のとき、この振幅は無限大となる。付録 B の (80)(81) が示すように、このような振幅を持つ平面波の合成としてグリーン関数が表現できる。このため、振幅因子 $1/\beta_0(p)$ を持つ入射波は、物理的に重要である。

さて、境界条件 (6) を用いて、 $[T_{00}(p) + 1]$ と $T_{10}(p)$ を未知数とする連立方程式を導けば

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\beta_0(p)}{\epsilon_0} & \frac{\beta_1(p)}{\epsilon_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{00}(p) + 1 \\ T_{10}(p) \end{bmatrix} = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_0}{\epsilon_0} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

となる。primary excitation が因子 $\beta_0(p)$ を持つため、右辺に因子 $\beta_0(p)$ が現れる。左辺の 2×2 行列の行列式 $D(p)$ が実の p に対して 0 でなければ、つまり、(22) が成立せず導波モードが存在しなければ、(33) の解は $\beta_0(p)$ に比例する。そこで

$$[T_{00}(p) + 1] = T_{10}(p) = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} S(p) \quad (34)$$

と置き、 $S(p)$ を散乱因子と呼ぶ。簡単な計算により

$$S(p) = \frac{k_0/\epsilon_0}{\beta_0(p)/\epsilon_0 + \beta_1(p)/\epsilon_1}. \quad (35)$$

当然のことであるが、(35) を用いれば (34) は、(20)(21) と一致する。

以上の議論を整理すると、電磁界の新しい表現が得られる。

$$H_y^{(0)}(x, z) = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} \mathcal{H}_y^{(0)}(x, z), \quad (36)$$

$$\mathcal{H}_y^{(0)}(x, z) = h_0 \left[-ik_0 \frac{\sin[\beta_0(p)z]}{\beta_0(p)} e^{-ipx} + S(p) e^{-ipx + i\beta_0(p)z} \right] \quad (37)$$

$\mathcal{H}_y^{(0)}(x, z)$ を elementary magnetic field と呼ぶ。これは $p = k_0$ のとき、非一様平面波

$$\mathcal{H}_y^{(0)}(x, z) = h_0 e^{-ik_0 x} \left[-ik_0 z + S(p) \right], \quad (p = k_0) \quad (38)$$

になる。これは (27) の形の解で、 $z = \infty$ の無限遠点で発散し、また、 z 方向へのエネルギーの流れを持つ。elementary field のエネルギーの保存則は

$$\frac{k_0}{\epsilon_0} \text{Re}[S(p)] = \left[\frac{\text{Re}[\beta_0(p)]}{\epsilon_0} + \frac{\text{Re}[\beta_1(p)]}{\epsilon_1} \right] |S(p)|^2 \quad (39)$$

となる。この右辺は、 $p = \pm k_0$ で $\beta_0(p) = 0$ であっても、 $\text{Re}[\beta_1(p)] > 0$ であれば正である。すなわち、媒質 0 と 1 において、 $-z$ 方向へのエネルギーの流れが存在し、その流れをもたらす電磁波が存在する。結局、elementary field は $\beta_0(p) = 0$ においても「影」とはならない。すなわち、入射平面波が振幅因子 $1/\beta_0(p)$ を持つ場合には、低入射角極限でも影は発生しない。このため、フレネルの影は有限振幅の平面波入射に関する現象であると結論できる。また、 $\beta_0(p) = 0$ において 1 次励振 (primary excitation) が消滅するため、「フレネルの影」が起きるとも解釈できる。

3 周期的境界 (grating) による回折

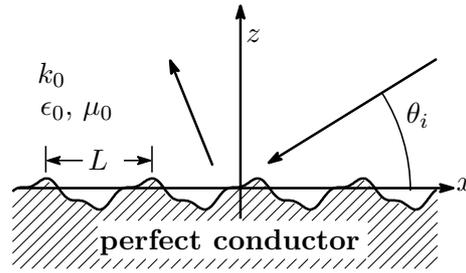


図 5: 完全導体の周期表面による平面波の回折。L は周期。入射角 θ_i は x 軸から計測する。

完全導体の周期的表面による TM 平面波の回折問題 (図 5) を考えよう。この回折問題では厳密な解析解を得るのが困難で、近似解法によらざるをえない。表面形状が周期 L を持つ周期関数 $f(x)$ により

$$z = f(x) = f(x + L), \quad k_L = \frac{2\pi}{L} \quad (40)$$

と表現できるものとする。ここで、 k_L は周期 L の空間角周波数である。完全導体表面上では、電界の接線成分は 0 であるから、ノイマン条件

$$\left. \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial n} \right|_{z=f(x)} = 0 \quad (41)$$

が成り立たなければならない。ここで n は周期表面への法線を表す。

問題の周期性のため、平面波入射のときの磁界はフロケの形に書ける。ここでは、磁界の y 成分 $H_y^{(0)}(x, z)$ が次式の有限和で近似できるものとする。

$$H_y^{(0)}(x, z) = h_0 e^{-ipx - i\beta_0(p)z} + h_0 \sum_{l=-N_F}^{N_F} T_l(p) e^{-i(p+lk_L)x + i\beta_0(p+lk_L)z}, \quad (42)$$

これはヘルムホルツ方程式 (3) を満たす。また、多くの研究から、打ち切り次数 N_F が十分大きいとき精度の良い近似解が得られると考えられている。式 (42) の右辺第 1 項は入射平面波であり、 $T_l(p) e^{-i(p+lk_L)x + i\beta_0(p+lk_L)z}$ は l 次の回折波であり、 $T_l(p)$ は l 次の回折振幅である。物理的には、 $\beta_0(p+lk_L)$ が実数のとき、 l 次の回折波は $-(p+lk_L)\mathbf{e}_x + \beta(p+lk_L)\mathbf{e}_z$ 方向に伝搬する平面波であるが、

$\beta_0(p + lk_L)$ が純虚数のときには z 方向に減衰するエバネセント波となる。この表現 (42) は Rayleigh²³⁾ が 1907 年に導入したものであるので、ここでは Rayleigh expression と呼ぶ²⁴⁾。Rayleigh expression では、回折問題とは周期表面上の境界条件を満足するように回折振幅 $T_l(p)$ を決定することである。

しかし、理論的には (42) は電磁界の完全な表現ではなく、一つの仮定である。入射振幅 h_0 が 0 になれば、 $H_y^{(0)}(x, z)$ は 0 になると仮定している。すなわち、表面に沿って伝搬する導波モード (固有関数) が存在しないと暗黙に仮定している。

3.1 Double Anomaly 条件

以下の議論では、周期 L と波長 $\lambda = 2\pi/k_0$ の関係が重要になる。ある正の整数 n^\dagger があって、周期 L が半波長 $\lambda/2 = \pi/k_0$ の n^\dagger 倍

$$L = \frac{\lambda}{2} n^\dagger \quad (43)$$

である場合には、

$$-k_0 + n^\dagger k_L = k_0 \quad (44)$$

$$\beta_0(k_0) = \beta_0(-k_0 + n^\dagger k_L) = 0 \quad (45)$$

が成り立つ。(43) を double anomaly 条件と言う。逆に、double anomaly 条件 (43) が成立しないことが、single anomaly 条件である。single anomaly の場合には、0 でない任意の整数 l に対して、

$$\beta_0(k_0 + lk_L) \neq 0, \quad (l \neq 0) \quad (46)$$

が成り立つ。後の議論では、これらの性質を用いる。

3.2 エネルギー保存則

Rayleigh expression(42) では、エネルギー保存則は

$$Re[\beta_0(p)] + 2Im[\beta_0(p)]Im[T_0(p)] = \sum_{l=-N_F}^{N_F} Re[\beta_0(p + lk_L)]|T_l(p)|^2 \quad (47)$$

となる。左辺は入射波のエネルギー、右辺の $Re[\beta_0(p + lk_L)]|T_l(p)|^2$ は l 次回折波のエネルギーである。これらの比として、 l 次回折効率 $\eta_l(p)$ が次式で定義される。

$$\eta_l(p) = \frac{Re[\beta_0(p + lk_L)]}{Re[\beta_0(p)] + 2Im[\beta_0(p)]Im[T_0(p)]} |T_l(p)|^2 \quad (48)$$

また、正規化されたエネルギー保存則は

$$\sum_l \eta_l(p) = 1 \quad (49)$$

となる。しかし、(48) では、 $\beta_0(p) = 0$ のとき分母が 0 となるので、 $\eta_l(p)$ が定義できない。このため、低入射角極限での回折効率が数値計算できない。この欠点のため、低入射角極限での回折特性が議論されなかった。しかし、この難点は以下の影理論では解決できる。

次に、(47) を用いて、低入射角極限における回折振幅について考えよう。 $p = k_0$ で $\beta_0(p) = 0$ の場合には、(47) は

$$\sum_{l=-N_F}^{N_F} \text{Re}[\beta_0(k_0 + lk_L)] |T_l(k_0)|^2 = 0 \quad (50)$$

となる。これは、 z 方向に伝搬する回折波の振幅が 0 であること、

$$T_l(k_0) = 0, \quad \text{any } l \text{ with } \text{Re}[\beta_0(k_0 + lk_L)] > 0 \quad (51)$$

を意味する。もし、この条件 (51) を満たす波動が存在すれば、それは外部からエネルギーの供給を受けずに存在する。すなわち、伝搬定数 $p = k_0$ を持つ導波モードである。もし、伝搬定数 $p = k_0$ を持つ導波モードが存在すれば、それは以下の形に表現できる。

$$H_y^{(0)}(x, z) = h_0 e^{-ik_0 x} \left[1 + \sum_{|k_0 + lk_L| \geq k_0} T_l(k_0) e^{-ilk_L x + i\beta_0(k_0 + lk_L)z} \right], \quad (52)$$

ここで、右辺の級数部分は、水平方向に回折される波とエバネセント波の和である。

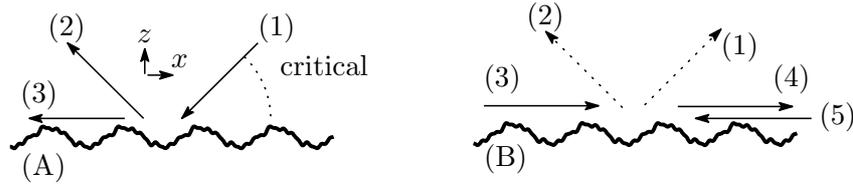


図 6: 相反定理。single anomaly の場合。(A) 平面波 (1) が臨界入射角で入射するとき、水平方向への回折波 (3) が発生するものとする。(B) この条件下では、水平方向から平面波 (3) が入射しても、回折波 (2) や回折波 (1) は発生しない。影形成反射波 (4) だけが発生する。さらに double anomaly の場合には、 $-x$ 方向に伝搬する平面波 (5) が付け加わる。また、図 (A) と (B) では、数学としての相反定理は、物理的な相反性を表さないことになる。これは興味深い事実である。

3.3 相反定理

よく知られているように、(42) における回折振幅は相反性²⁵⁾

$$\beta_0(p) T_l(-p - lk_L) = \beta_0(-p - lk_L) T_l(p), \quad (53)$$

を満たす。ここで、 l は任意の整数である。低入射角極限で、たとえば、 $p = k_0$ の場合、 $\beta_0(p) = 0$ となるので、(53) は

$$\beta_0(-k_0 - lk_L) T_l(k_0) = 0, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (54)$$

となる。このため、 $\beta_0(-k_0 - lk_L) \neq 0$ となる回折次数 l に関する回折振幅は、すべて 0 となる。すなわち、水平方向に回折されるフロケモードの回折振幅を除いて、

$$T_l(k_0) = 0, \quad \text{any } l \text{ for which } \beta_0(-k_0 - lk_L) \neq 0. \quad (55)$$

これは、(51) よりも強い条件を与える。また、(54) で $l=0$ と置くと、 $\beta_0(-k_0)T_0(k_0) = 0$ となる。ここで、 $\beta_0(-k_0) = \beta_0(k_0) = 0$ だから、 $T_0(k_0)$ の値は相反性からは決まらない。このため、single anomaly の場合、 $p = k_0$ の時の解は

$$H_y^{(0)} = h_0[1 + T_0(k_0)]e^{-ik_0x} \quad (56)$$

の形なる。また、double anomaly の場合には、式 (43) により、ある正の整数 n^\dagger が存在して $\beta(-k_0 + n^\dagger k_L) = \beta_0(k_0) = 0$ となる。このため、 $T_{-n^\dagger}(k_0)$ の値も (54) からは決まらない。このため、double anomaly の条件下では $p = k_0$ のとき、解表現は

$$H_y^{(0)} = h_0[1 + T_0(k_0)]e^{-ik_0x} + h_0T_{-n^\dagger}(k_0)e^{ik_0x} \quad (57)$$

となる。これは $-x$ 方向に伝搬する平面波と x 方向に伝搬する平面波の和であり、一種の定在波である。

(56) が境界条件 (41) を満たせば、(56) は伝搬定数 $p = k_0$ を持つ導波モードになる。しかし、single anomaly の場合、境界条件を満たすには

$$1 + T_0(k_0) = 0 \quad (58)$$

が必要になる²⁶⁾。これは、 $p = k_0$ のとき、 $H_y^{(0)}(x, z)$ が恒等的に 0 になり物理的には影となることを表している。

一方、double anomaly の場合にも、(57) が境界条件を満足するには、一般に

$$1 + T_0(k_0) = 0 \quad (59)$$

$$T_{-n^\dagger}(k_0) = 0 \quad (60)$$

が必要である。このため、 $p = k_0$ のとき、 $H_y^{(0)}(x, z)$ が恒等的に 0 になり、物理的には影となる。しかし、double anomaly の場合には例外が起こる。すなわち、垂直線分と水平線分から構成される特殊な周期表面形状にたいしては導波定在波が数学的に存在することを示すことが出来る²⁶⁾。しかし、現実の周期表面には、歪みや不規則な荒れがあるのが通常であるから、物理的工学的観点からは、伝搬定数 $p = k_0$ をもつ導波定在波は存在しないと結論できる。

3.4 影理論

低入射角極限 ($p = k_0$) では、反射係数 (0 次の回折振幅 $T_0(p)$) が -1 になるとの仮説を用いて

$$T_0(p) = -1 + [T_0(p) + 1] \quad (61)$$

と置き、(42) を以下の形に書き直す。

$$\begin{aligned} H_y^{(0)}(x, z) = & h_0[e^{-ipx-i\beta_0(p)z} - e^{-ipx+i\beta_0(p)z}] \\ & + h_0 \sum_{l=-N_F}^{N_F} [T_l(p) + \delta_{l0}] e^{-i(p+l k_L)x+i\beta_0(p+l k_L)z} \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、係数 $[T_l(p) + \delta_{l0}]$ を変形回折振幅と呼ぶ。右辺第一項は primary excitation であり $\beta_0(p)$ に比例する。これが第2項の回折波の和を励振する。このため、変形回折振幅を決定する連立方程式は、必ず、

$$\mathbf{D}(p) \begin{bmatrix} T_{-N_F}(p) \\ \dots \\ \dots \\ T_0(p) + 1 \\ T_1(p) \\ \dots \\ T_{N_F}(p) \end{bmatrix} = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} \begin{bmatrix} e_{-N_F}(p) \\ \dots \\ \dots \\ e_0(p) \\ e_1(p) \\ \dots \\ e_{N_F}(p) \end{bmatrix} \quad (63)$$

の形に書ける。ここで、 $\mathbf{D}(p)$ は $(2N_F + 1) \times (2N_F + 1)$ 行列である。(31) が示すように primary excitation が因子 $\beta_0(p)$ を持つため、右辺の励振項は $\beta_0(p)$ に比例し $\beta_0(p) = 0$ のとき0になる。

もし、 $p = \pm k_0$ のとき、 $\mathbf{D}(p)$ の行列式 $D(p)$ が0でないなら、すなわち、伝搬定数 $p = \pm k_0$ を持つ導波モードが存在しなければ、

$$[T_l(\pm k_0) + \delta_{l0}] = 0, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (64)$$

が成り立つ。すなわち、低入射角極限で、反射係数 $T_0(\pm k_0)$ が -1 となり、その他の次数の回折振幅が全て0となる。これは、(51) や (55) よりも強い条件を与える。

また、任意の実数 p に対して、行列式 $D(p)$ が0でなければ、変形回折振幅 $[T_l(p) + \delta_{l0}]$ も $\beta_0(p)$ に比例する。そこで、

$$T_l(p) + \delta_{l0} = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} S_l(p) \quad (65)$$

と置くことができる。ここで、 $S_l(p)$ を l 次の散乱因子と言う。相反性から、散乱振幅の性質

$$S_l(p - lk_L/2) = S_l(-p - lk_L/2) \quad (66)$$

が導ける。primary excitation と変形回折振幅が共に因子 $\beta_0(p)$ を持つため、 $H_y^{(0)}(x, z)$ は次式の形に書ける。

$$H_y^{(0)}(x, z) = \frac{2\beta_0(p)}{k_0} \mathcal{H}_y^{(0)}(x, z), \quad (67)$$

$$\mathcal{H}_y^{(0)}(x, z) = \left[-ih_0 k_0 \frac{\sin[\beta_0(p)z]}{\beta_0(p)} e^{-ipx} + h_0 \sum_{l=-N_F}^{N_F} S_l(p) e^{-i(p+lk_L)x + i\beta_0(p+lk_L)z} \right] \quad (68)$$

この表現は、Rayleigh expression ではないことに歴史的意義がある。これは、 $\beta_0(p) = 0$ のとき、 $H_y^{(0)}(x, z)$ が恒等的に0となることを表している。また、散乱因子を決定する連立方程式は

$$\mathbf{D}(p) \begin{bmatrix} S_{-N_F}(p) \\ \dots \\ \dots \\ S_0(p) \\ S_1(p) \\ \dots \\ S_{N_F}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{-N_F}(p) \\ \dots \\ \dots \\ e_0(p) \\ e_1(p) \\ \dots \\ e_{N_F}(p) \end{bmatrix} \quad (69)$$

となる。これは、 $\mathcal{H}_y^{(0)}(x, z)$ が境界上でノイマン条件を満たすことから導くことができる。すなわち、影理論では、回折問題とは散乱因子を決定することである。(69) を解いて散乱因子 $S_l(p)$ を定め、次に (65) を用いて回折振幅 $T_l(p)$ を計算する。また、散乱振幅から回折効率 $\eta_l(p)$ は次式で計算できる。

$$\eta_l(p) = \begin{cases} 4 \frac{\text{Re}[\beta(p + lk_L)]}{k^2} \beta(p) |S_l(p)|^2, & |p| \leq k_0 \\ \frac{\text{Re}[\beta(p + lk_L)] |S_l(p)|^2}{k \text{Re}[S_0(p)]}, & |p| > k_0 \end{cases}, \quad (\text{when } l \neq 0) \quad (70)$$

$$\eta_0(p) = \begin{cases} \left| 1 - \frac{2\beta_0(p)}{k_0} S_0(p) \right|^2, & |p| \leq k_0 \\ 0, & |p| > k_0 \end{cases}, \quad (\text{when } l = 0) \quad (71)$$

これは、エネルギー保存則 (49) を満たす。Rayleigh expression では、低入射角極限では回折効率が定義できない。しかし、(71) と (70) では、任意の p に対して回折効率が定義できる。この利点を用いると、(71) から 0 次回折効率の不連続性

$$\lim_{|p| \rightarrow k_0^-} \eta_0(p) = 1, \quad \lim_{|p| \rightarrow k_0^+} \eta_0(p) = 0, \quad (72)$$

が得られる。ここで、 k_0^- (k_0^+) は、 $|p|$ が左から (右から) k_0 に接近することを表す。さらに、(70) から、

$$\lim_{|p| \rightarrow k_0^-} \eta_l(p) = 0, \quad (l \neq 0) \quad (73)$$

となる。結局、低入射角極限 (8) では、0 回の回折効率が 1 になり、その他の次数の回折効率が 0 になることを表している。このような回折効率の性質は、多くの数値解析的研究に現れ、経験的に知られていた⁸⁾⁻¹¹⁾。しかし、その原因について言及されることはなかった。しかし、この性質はフレネルの影に基づくことは明らかである。

また、散乱因子を用いてエネルギー誤差 $D_{err}(p)$ は次式で表せる。

$$D_{err}(p) = \left| 1 - \sum_l \eta_l(p) \right| = \begin{cases} \frac{4\beta(p)}{k_0} \text{Re}[S_0(p)] S_{err}(p), & |p/k_0| \leq 1, \\ S_{err}(p), & |p/k_0| > 1 \end{cases}. \quad (74)$$

$$S_{err}(p) = \left| 1 - \frac{\sum_l \text{Re}[\beta_0(p + lk_L)] |S_l(p)|^2}{k_0 \text{Re}[S_0(p)]} \right|. \quad (75)$$

(74) により、 $\lim_{|p| \rightarrow k^-} D_{err}(p) = 0$ となる。すなわち、低入射角極限ではエネルギー誤差は 0 となる。この性質も影理論により初めて明らかになった¹⁶⁾。

影理論を用いれば、低入射角やエバネセント波の入射に対する回折特性をも合理的に計算できる。散乱因子やエネルギー保存則の数値計算例に関しては、文献¹⁶⁾⁻¹⁸⁾²⁷⁾を参照されたい。

4 まとめ

「フレネルの影」の現象を説明し、その現象を利用する影理論について述べた。平坦な誘電体境界の場合には、スネルの法則と電磁界の連続性から、幾何学的に影の現象が説明できることを指摘し

た。周期表面の場合については、相反定理を用いれば低入射角極限での電磁界の可能な表現が1項または2項の和になることを見いだした。この表現に境界条件を適用して、表面に沿って自由伝搬する導波モードが存在しないならば低入射角極限で「フレネルの影」が起きることが分かった。また、影理論に基づき、Rayleigh expression とは異なる表現を導入すれば、低入射角極限に置いても回折効率が合理的に計算できることを明らかにした。今後、影理論を不規則表面による散乱の問題に拡張し発展することが望まれる。

最後に、山北次郎先生および波動信号工学研究室の皆様にご議論していただいたことを記し謝辞とする。

A 電磁界の成分

時間因子 $e^{-i\omega t}$ を仮定しており、磁界は y 成分だけの TM 波の場合、Mawell 方程式 $\text{rot}\mathbf{H} = -i\omega\epsilon_m\mathbf{E}$ から、電界の x 成分 $E_x^{(m)}$ 、 z 成分 $E_z^{(m)}$ は

$$E_x^{(m)} = \frac{1}{i\omega\epsilon_m} \frac{\partial H_y^{(m)}}{\partial z} \quad (76)$$

$$E_z^{(m)} = \frac{i}{\omega\epsilon_m} \frac{\partial H_y^{(m)}}{\partial x} \quad (77)$$

B ハンケル関数のスペクトル表現

位置 (x_s, z_s) , $(z_s > 0)$ にある点波源からの TM 波の輻射を考える。数学的には、これは Green 関数を求める問題である。媒質 0 における Green 関数を $G_0(x, z|x_s, z_s)$ と書くと、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right] G_0(x, z|x_s, z_s) = -\delta(x - x_s)\delta(z - z_s) \quad (78)$$

を満たし、さらに、遠方 $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2} \rightarrow \infty$ おいて、Sommerfeld の放射条件を満たす。

周知のように、そのような Green 関数 $G_0(x, z|x_s, z_s)$ は、ハンケル関数 $H_0^{(1)}(\cdot)$ で与えられ、平面波の和として表現できる。

$$\begin{aligned} G_0(x, z|x_s, z_s) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}) \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip(x-x_s) + i\beta_0(p)|z_s-z|}}{\beta_0(p)} dp \end{aligned} \quad (79)$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip(x-x_s) + i\beta_0(p)(z_s-z)}}{\beta_0(p)} dp \quad (80)$$

但し、(79) は Green 関数のスペクトル表現であり、全空間で成立する。一方、(80) は $z < z_s$ だけで成立する。(80) は、振幅

$$A_F(p) = i \frac{e^{ipx_s + i\beta_0(p)z_0}}{4\pi\beta_0(p)} \quad (81)$$

をもつ下向きの平面波の和である。 $\beta_0(p) = 0$ のとき、 $A_F(p)$ は発散する。この発散は物理的なもので、 $\pm x$ 方向に放射される波が存在するために起きる。

参考文献

- [1] S. O. Rice, Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surface, *Comm. Pure. Appl. Math.* Vol. 4, pp. 351-378, 1953.
- [2] P. Beckmann and A. Spizzichino, *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, Pergamon, Oxford, 1963.
- [3] F. G. Bass and I. M. Fuks, *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, Pergamon, New York, 1979.
- [4] J. Nakayama, H. Ogura and B. Matsumoto, A probabilistic theory of scattering from a random rough surface, *Radio Sci.*, Vol. 15, no. 6, pp. 1049-1057, 1980.
- [5] J. Nakayama, M. Sakata, and H. Ogura, A probabilistic theory of electromagnetic wave scattering from a slightly random surface: 2. Vertical polarization, *Radio Sci.*, Vol. 16, no. 5, pp. 847-853, 1981.
- [6] J. Nakayama, Anomalous scattering from a slightly random surface, *Radio Sci.*, Vol. 17, no. 3, pp. 558-564, 1982.
- [7] Y. Tamura and J. Nakayama, Mass operator for wave scattering from a slightly random surface, *Waves in Random Media*, Vol. 9, pp. 341-368, 1999.
- [8] H. Ikuno and K. Yasuura, Improved point-matching method with application to scattering from a periodic surface, *IEEE Trans. Antenna Propag.*, AP-21, no. 5, pp. 657-662, 1973.
- [9] 電子通信学会編, 電磁界の近代解析法, 第2章, コロナ社, 東京, 1979.
- [10] T. Yamasaki and T. Hinata, Scattering of Electromagnetic Wave by Plane Grating with Reflector, *IECE Trans.* Vol. J61-B, no. 11, pp. 935-942, 1978.
- [11] J. Yamakita, and K. Rokushima, Scattering of plane waves from dielectric gratings with deep grooves, *Trans. IECE Part B*, Vol. J66B, no.3, pp. 375-382, 1983.
- [12] M. I. Charnotskii, Wave scattering by periodic surface at low grazing angles: Single grazing mode, *Progress in Electromagnetic Research*, PIER 26, pp. 1-42, 2000.
- [13] J. Nakayama, K. Hattori and Y. Tamura, Diffraction amplitudes from periodic Neumann surface: Low grazing limit of incidence, *IEICE Trans. Electron.* Vol. E89-C, no. 5, pp. 642-644, 2006.
- [14] J. Nakayama, K. Hattori and Y. Tamura, Diffraction amplitudes from periodic Neumann surface: Low grazing limit of incidence (II), *IEICE Trans. Electron.* Vol. E89-C, no. 9, pp. 1362-1364, 2006.

- [15] J. Nakayama, K. Hattori and Y. Tamura, Diffraction amplitudes from periodic Neumann surface: Low grazing limit of incidence (III), IEICE Trans. Electron. Vol. E90-C, no. 2, pp. 536-538, 2007.
- [16] J. Nakayama, Shadow theory of diffraction grating, IEICE Trans. Electron. Vol. E92-C, no.1, pp. 17-24, 2009.
- [17] 山北次郎、若林 秀昭、松本恵治、浅居正光, 誘電体回折格子への影理論の適用について、電気学会電磁界理論研究会資料、EMT-08-144、2008.
- [18] 浅居正光, 松本恵治、若林 秀昭、山北次郎、影理論を用いた誘電体周期構造による散乱界の表現、電気学会電磁界理論研究会資料、EMT-09-45、2009.
- [19] 前田憲一, 電波工学, 共立出版、東京、1958.
- [20] Y. Tamura and J. Nakayama, Wave reflection and transmission from a thin film with one-dimensional disorder, Waves in Random Media, Vol. 14, pp. 435-465, 2004.
- [21] 杉山俊介, 田村安彦, 中山純一, 一次元揺らぎがある薄膜によるTM平面波の反射と透過, 電子情報通信学会誌 Vol.J-90C, no.3, pp. 246-255, 2007.
- [22] Y. Tamura and J. Nakayama, TE plane wave reflection and transmission from a one-dimensional random slab, IEICE Trans. Vol. E88-C, no.4, pp. 713-720, 2005.
- [23] L. Rayleigh, On the dynamical theory of gratings, Proc. Royal Soc. A. Vol. 79, pp. 399-416, 1907.
- [24] Rayleigh²³⁾ は打ち切り次数 N_F が無限大の場合を考えたので、 N_F が有限の (42) は安浦の表現と呼ぶべきである⁸⁾⁹⁾。しかし、Rayleigh も安浦も入射波と回折波の和として電磁界を表現することでは共通しているので、(42) も Rayleigh 表現と呼ぶ。一方、影理論では、入射波と影形成反射波、変形回折波の和として電磁界を表現する。
- [25] R. Petit, ed. *Electromagnetic theory of gratings*, Springer, Berlin, 1980.
- [26] 中山純一、田村安彦、回折格子の影理論(2): 導波定在波、電気学会電磁界理論研究会資料、EMT-09-44、2009.
- [27] J. Nakayama, Y. Tamura and K. Tsutsumi, Shadow Theory of Diffraction Grating: A Numerical Example for TE Wave, IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, no. 3, pp. 370-373, 2009.

Fresnel Shadow and Shadow Theory

SUMMARY: When an electromagnetic plane wave is incident on a flat interface between two media, the Fresnel reflection takes place. At a low grazing limit of incident angle, the Fresnel reflection coefficient becomes -1 , so that the incident wave is completely canceled by the reflected wave. As a result, the total wave field becomes a dark shadow. It is known empirically that such a shadow takes place in cases of scattering from surfaces with shift invariance, such as a periodic surface and a homogeneous random surface. However, no discussions on this have been carried out so far. This paper discusses such a shadow mathematically and physically. Then, a new method dealing with the reflection problem and wave diffraction by a periodic surface is proposed.

key words: reflection coefficient, diffraction amplitude, scattering factor, shadow theory, elementary excitation.