研究開発
レター

二次行列多項式システムの過減衰条件

正員 森　武宏（京都工芸繊維大学電子情報工学科）
正員 小亀英己（大阪府立大学電気電子システム学科）

Sufficiency Criteria for Overdamped Quadratic Matrix Polynomial Systems

Mori Takehiro, Member (Dept. of Electronics & Information Science, Kyoto Institute of Technology),
Kokame Hideki, Member (Dept. of Electrical & Electronic Systems, Osaka Prefecture University)

Several sufficient conditions are derived for quadratic matrix polynomial systems to be overdamped based on an established characterization of the property. One of the conditions is shown to be less conservative than a previous sufficiency criterion, whereas another one to complement it. It is also pointed out that a pair of the coefficient matrices of the systems is interchangeable so long as the overdamping property is concerned. This fact may possibly double the line-up of sufficiency criteria for overdampedness, thus enriching alternatives to such testable conditions.

キーワード：quadratic matrix polynomials, polynomial systems, overdamped systems, sufficiency criteria, algebraic conditions

1. まえがき

二次行列多項式モデルは、その係数が実システムの物理的特性を色濃く反映しているため、機械システムや構造物系の数学モデルとして、通常の一次多項式モデルよりも好まれることが多い。このモデルについて何よりの関心は安定性であり多くの研究結果があるが（例えば、直近では文献(3)及びその参考文献参照）、その特殊な場合である過減衰性についても注意が払われている[(1)(2)]。この性質は計測系などのように振動が忌避されるシステムに要求されるものであるが、従来の過減衰性についての結果は漸近安定性に関するものに比して決して豊かであるとはいえない。

本稿は、既に報告されている過減衰性の等価な条件に基づいていくつかの新たな十分条件を導き、この性質を判定する手段の充実を計ろうというものである。

2. 従前の結果について

下記の二次行列多項式について考える。

$$L(s) := s^2A + sB + C \qquad (1)$$

$$A = A' > 0, B = B' > 0, C = C' > 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに、$(')$は転置記号、(>0)は正定値性を示す。 以下では(1)式をその特性式とするシステムをシステム(1)と呼ぶ。このシステムの過減衰性は次のように定義されている。

[定義][(1)] システム(1), (2)は、任意の非零複素ベクトルxに対して、

$$(x^*Bx)^2 > 4(x^*Ax)(x^*Cx), \ (*):\text{共役転置記号} \ (3)$$

が成り立つとき、過減衰である。

(2)式のもとでシステム(1)は漸近安定、すなわちその特性根はすべて複素開左半平面にあるが、(3)式を加えるとそれらはさらに実軸上に局限される。しかしこの定義はxについての四次式であり、そのままでは過減衰性の判定は困難である。このため、次のようなスカラパラメータを含む行列不等式への等価な書き換えがなされている[(2)]。

〔補題1〕 システム(1), (2)の過減衰性の必要十分条件は、$L(-k) < 0$、あるいは

$$B > Ak + C/k := T(k) \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

を満たすスカラ正数kが存在することである。

さらに、文献(2)にはこの書き換えに基づいて過減衰性の十分条件が示されている。

〔補題2〕（文献(2), 定理3） 条件、

$$\lambda_m(B_A) > 2\lambda_M^{1/2}(C_A) \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

のもとで、システム(1), (2)は過減衰である。ここに、$B_A = A^{-1}B, C_A = A^{-1}C$であり、$\lambda_m(\cdot)$、$\lambda_M(\cdot)$はそれぞれ最小、最大の行列固有値を表す。

3. 主要な結果

この節では、前節の補題1に基づき、(2)式のもとで一連の新たな過減衰性の十分条件を導く。

〔定理1〕 下式は、システム(1)の過減衰性の十分条件である。

$$1 > \lambda(B^{-1}T(k_0)),\ k_0 = \lambda_M^{1/2}(C_A). \cdots\cdots\cdots (6)$$

ここに、$\lambda(X)$ は行列 Xの任意の固有値を示す。

(証明) $B = QQ'$となる任意の正方正則な Q により、(4) に左から Q^{-1}、右から $(Q^{-1})'$を乗ずると、同式は次式と等価となる。

$$I > Q^{-1}A(Q^{-1})'k + Q^{-1}C(Q^{-1})'/k. \cdots\cdots\cdots (7)$$

ただし、Iは単位行列である。ここで、$Q^{-1}A(Q^{-1})'k + Q^{-1}C(Q^{-1})'/k$の固有値は $A_Bk + C_B/k$, ただし $A_B := B^{-1}A$, $C_B := B^{-1}C$、のそれらに等しいことに注意すると、(7) 式は

$$1 > \lambda(A_Bk + C_B/k) = \lambda(B^{-1}T(k)) \cdots\cdots\cdots (8)$$

と等価である。(6) 式の条件は、(8) 式でさらに $k = k_0$と選んだものである。 (終)

この定理について、下記にいくつかの留意すべき点を補足しておく。

i) いま、$\overline{A}^2 = Q^{-1}A(Q^{-1})'$, $\overline{C}^2 = Q^{-1}C(Q^{-1})'$と置くと、(7) 式右辺は $(\overline{A}\sqrt{k} - \overline{C}/\sqrt{k})(\overline{A}\sqrt{k} - \overline{C}/\sqrt{k})' + \overline{AC} + \overline{CA}$と書ける。従って、$k$はこの第一項で行列$\overline{A}\sqrt{k} - \overline{C}/\sqrt{k}$の"大きさ"を何らかの意味で小さくするよう選べば良い。kはスカラパラメータであるから一般に一意には決まらないが、この趣旨に沿った選択肢はいくつか考えることができ $k = k_0$はその一つである。他の kの値の例を後に示す。

ii) 条件 (6) は、行列 $B^{-1}T(k_0)$ が Schur 行列であることを意味する。従って、定理の表現のように直接固有値を計算する以外にも、リヤプノフ行列不等式に帰着させて判ずることもできる。また、行列の Schur 性の十分条件として、任意の行列ノルム $||\cdot||$ による $1 > ||B^{-1}T(K_0)||$ を過減衰性の条件とすることもできる。

iii) 補題2は、$B > T(k_0)$ の十分条件として導かれている。一方、その証明より明らかなように、定理1は条件 $B > T(k_0)$ を等価変換したものであるから、補題2よりも一般に鋭い結果を与える。実際、例えば行列のサイズが 2 の (1) 式のシステムで、$A = diag(1, 1.5) + offdiag(-0.5)$, $B = diag(10, 9) + offdiag(4)$, $C = diag(1.2, 2) + offdiag(0.6)$, ただし $offdiag(\cdot)$ は 0 を対角要素とし $(\cdot)$ を非対角要素とする行列を示す、の場合、(6) 式は満たされるのに対し (5) 式は不成立であり、定理1のみが過減衰性を結論する。

ところで、過減衰性で注目される点は、その定義式 (3) から明らかなように (2) 式のもとで行列 A と行列 Cの立場は全く対等であることである。つまり、A と Cを交換しても性質は変わらない。補題1のような過減衰性の必要十分条件では、簡単に確かめられるようにこの交換は条件に何等の変化ももたらさないが、十分条件では事情は異なる。例えば、定理1における A と Cの交換は kの値の k_0以外の選択を与える。

〔系1〕 (6) 式の条件が k_0に代わって $k = k_1 = \lambda_m^{-1/2}(C_A)$ に対して成り立つとき、システム (1) は過減衰である。

補題2においても、この交換を行うと次の結果を得る。

〔定理2〕 システム (1) は、下記の条件のもとで過減衰である。

$$\lambda_m(B_C) > 2\lambda_M^{1/2}(A_C). \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここに、$B_C = C^{-1}B$、$A_C = C^{-1}A$ である。

この定理はもとの補題2よりも次の例に示すように良い結果を生む場合があり、補題2を補うものといえる。いま、$A = I$, $C = B$の場合を考えよう。このとき、(5) 式は $\lambda_m^2(B) > 4\lambda_M(B)$, (9) 式は$\lambda_m(B) > 4$ となる。前者は $\lambda_m(B)$ と $\lambda_M(B)$ との間に、$\lambda_M(B) \geq \lambda_m(B)$ 以外の拘束を設けており、明らかに後者より保守的である。ちなみに、後者はこの場合、正確な過減衰条件となっている。このように、条件中で行列 A と Cが交換可能である事実は、過減衰性の十分条件が扱うことのできるシステムのクラスを少なからず拡げるものといえよう。

4. むすび

二次行列多項式システムが過減衰であるための一連の十分条件を導き、その判定ツールの選択肢を豊かにした。係数の物理的特性にこだわらず、(1) 式の行列式をとりスカラ特性多項式を基礎にする立場にたてば、対応する性質は非振動性（aperiodicity）と呼ばれ代数的な判別法がいくつか知られている[4]。

（平成12年 5 月24日受付）

文　献

(1) P. Lancaster: Lambda-matrices and Vibrating Systems, Pergamon Press, Oxford (1966)

(2) L. Barkwell & P. Lancaster: "Overdamped and Gyroscopic Vibrating systems", *Trans. ASME, J. Appli. Mech.*, **59**, 176-181 (1992)

(3) A.M. Diwehar & R.K. Yedavalli: "Stability of Matrix Second-Order Systems: New Conditions and Perspective", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **44-9**, 1773-1777 (1999)

(4) E.I. Jury: Inners and Stability of Dynamical Systems, Wiley, NY (1974)

森　　武 宏（正員） 1945年生。1968年京都大学工学部電子工学科卒業。1974年同大学院博士課程課程修了、同大学助手、助教授を経て1990年より京都工芸繊維大学教授。 工学博士。 主として制御系の解析設計の研究に従事。

小 亀 英 己（正員） 1946年生。1968年京都大学工学部電子工学科卒業。1973年同大学大学院博士課程修了、同大学助手。1980年大阪工業大学講師、同助教授、教授を経て1995年より大阪府立大学教授。 工学博士。 ロバスト制御の研究に従事。