論　文

有限幅周期表面によるTM平面波の散乱

柏原　彩[†]　　中山　純一[†]

Scattering of TM Plane Wave from a Finite Periodic Surface

Aya KASHIHARA[†] and Junichi NAKAYAMA[†]

あらまし　有限幅周期表面によるTM平面波の散乱をSpectral formalism(SF)を用いて解析する．まず，回折ビームと光学定理，全散乱断面積，回折ビームの相対電力の定義を述べる．次に，鏡像法を用いれば散乱波のスペクトルが凹凸表面部分の境界値（境界上の二次波源）のみで表現できることを示し，同時に境界値を決定するスペクトル領域の積分方程式を導く．そのような凹凸部分の境界値をフーリエ級数に展開し，フーリエ係数に関する連立方程式を数値的に解いて境界値を定め，散乱波のスペクトルを求めた．次に，全散乱電力の入射角依存性，回折の相対電力の入射角依存性，散乱断面積を計算し，また，Wood Anomalyと回折ビームのビーム幅，散乱波のスペクトルの特異性について議論している．

キーワード　波動の散乱，有限幅周期表面，Spectral formalism, 積分方程式，回折ビーム

1. まえがき

この論文では，有限幅周期表面によるTM平面波の散乱を取り扱う（図1参照）．対比のため，図1において幅Wが無限大の場合を回折格子と呼ぶことにする．

平面波が回折格子に入射するとき，離散的な方向に回折が生じること，回折角は有名な回折公式で決まること，回折波はフロケの解をもつことはよく知られている．回折効率を解析するため，国内外で多くの研究がなされてきた[1]〜[3]．一方，有限幅周期表面においては，散乱波は連続スペクトルをもちすべての方向に散乱が発生する．積分方程式[4]，摂動法[5], [6]，安浦の方法[7]などを用いて，散乱の角度分布が解析されてきた．しかし，散乱の入射角依存性やWood Anomalyに関する詳しい議論はほとんどなされていない．

最近，筆者の1人は周期フーリエ変換の概念を考案して，有限幅周期表面による散乱波の新しい表現を導いた[8], [9]．すなわち，散乱波の形は拡張されたフロケの解となり，物理的には離散的な次数をもつ回折ビームの和であることを示した．同時に，回折ビーム電力の総和が鏡面反射方向成分の振幅減少分に等しいとの光学定理の新しい表現を導いた．先の論文[10]では，Rayleighの仮説を用いない解析法として，Spectral formalism(SF) [11]〜[13]の一部を改良した解析法を提案し，散乱の角度分布や回折ビーム電力の入射角依存性などの散乱特性を解析した．しかし，議論はTE波の散乱に限定されていた．

この論文では，TM平面波の散乱をSFを用いて定式化する．SFでは，図1で$z > \sigma$である外部領域での散乱波を上向きの平面波の和で表現する．そのような平面波の振幅（散乱波のスペクトル）と表面上の境界値との関係式，及び境界値を決定する積分方程式をGaussの定理と補助関数を用いて導く．平面波の知識だけで厳密な方程式を導けることが，SFの特徴であ

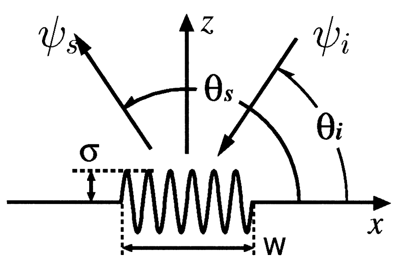

図1　有限幅周期表面によるTM平面波の散乱
Fig. 1　Scattering of a TM plane wave from a periodic surface with finite extent.

† 京都工芸繊維大学電子情報工学科，京都市
Department of Electronics and Information Scienece, Kyoto Institute of Technology, Kyoto-shi, 606-8585 Japan

り，回折理論 [3]，粗面散乱 [12]，不規則表面散乱 [13] へも応用されている．この論文では，補助関数を工夫して鏡像を取り入れれば，散乱波のスペクトルが凹凸表面部分の境界値のみで表現できることを示す．凹凸部分の境界値をフーリエ級数に展開し，フーリエ係数に関する連立方程式を導き，それを近似的・数値的に解いて散乱波のスペクトルを求める．散乱波のスペクトルから，鏡面反射方向成分の振幅減少分が全散乱電力に等しいとの光学定理の関係，回折ビームの相対電力の入射角依存性，散乱断面積を具体的に計算している．正弦波状の有限幅周期表面では，Wood Anomaly が臨界入射角近傍での全散乱電力の急激な変動として，また，相対電力の急激な変動として現れることを明らかにしている．更に，臨界入射角に対する散乱断面積を図示し，水平方向に散乱される回折ビーム幅は周期表面の幅 W の平方根に逆比例する傾向があることを示した．

2. 回折ビームと光学定理

平たん面の一部が周期的に変形した有限幅周期表面による TM 平面波の散乱を考える（図 1 参照）．

まず，表面の凹凸を

$$z = f(x) = f_p(x)u(x|W) \tag{1}$$

$$f_p(x) = f_p(x+L) \tag{2}$$

と表す．ここで，$f_p(x)$ は周期 L の周期関数であり，$u(x|W)$ は周期表面の幅を表す矩形関数

$$\begin{aligned} u(x|W) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s|W)e^{-isx}ds \\ &= \begin{cases} 1, & |x| < W/2 \\ 0, & |x| > W/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

$$U(s|W) = W\frac{\sin\left(\frac{sW}{2}\right)}{\frac{sW}{2}} \tag{4}$$

である．W は周期表面の幅であり，$U(s|W)$ は $u(x|W)$ のフーリエ変換である．以下では正弦波状の表面

$$f_p(x) = \sigma \sin(k_L x) \tag{5}$$

を取り上げる．ここで σ は周期表面の凹凸の高さである．周期 L に対する空間角周波数を k_L，幅 W に対する空間角周波数を k_W と書く．

$$k_L = \frac{2\pi}{L}\ ,\ k_W = \frac{2\pi}{W} \tag{6}$$

次に，電磁界を考えよう．ここでは TM 平面波を考えるので磁界の y 成分を $\psi(x,z)$ とする．これは，$z > f(x)$ なる領域で波動方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right]\psi(x,z) = 0 \tag{7}$$

を満たし，表面上で Neumann 条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \tag{8}$$

を満たす．ここで n は表面上の法線である．また，$k = 2\pi/\lambda$ は波数，λ は波長である．

入射平面波 $\psi_i(x,z)$ を

$$\psi_i(x,z) = e^{-ipx}e^{-i\beta_0(p)z} \tag{9}$$

とする．p は入射角 θ_i の関数であり，また，$\beta_0(p)$ は p の関数である

$$p = k\cos\theta_i, \tag{10}$$

$$\beta_0(p) = \sqrt{k^2 - p^2}, \qquad Im[\beta_0(p)] \geqq 0 \tag{11}$$

ここで Im は虚部を表す．次に $\psi(x,z)$ を，式 (9) で与えた入射平面波，及び鏡面反射波，散乱波の和として表現する．

$$\psi(x,z) = \psi_0(x,z) + \psi_s(x,z) \tag{12}$$

$$\psi_0(x,z) = e^{-ipx}[e^{-i\beta_0(p)z} + e^{i\beta_0(p)z}] \tag{13}$$

$\psi_0(x,z)$ は入射波と鏡面反射波の和であり，$z = 0$ において $\partial\psi_0/\partial z = 0$ を満たす．次に散乱波の表現を考える．SF では表面より上にある空間を二つに分け，$z > \sigma$ である部分を外部領域と呼ぶ．外部領域においては，散乱波 $\psi_s(x,z)$ をスペクトル表現する．

$$\psi_s(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(s)e^{-i(p+s)x}e^{i\beta_0(p+s)z}ds \tag{14}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x,z) \tag{15}$$

式 (14) は，上向きの平面波とエバネセント波の和であり，$A(s)$ は散乱波のスペクトルである．一方，式 (15) は周期フーリエ変換 [8] に基づく拡張されたフロケの解であり，$\psi_m(x,z)$ は m 次の回折ビームである [9], [10].

$$\begin{aligned} \psi_m(x,z) &= \int_{-\pi/L}^{\pi/L} A(s+mk_L)e^{-i(p+s+mk_L)x} \\ &\quad \times e^{i\beta_0(p+s+mk_L)z}ds \end{aligned} \tag{16}$$

$A(s+mk_L)$ は，θ_s 方向に散乱される平面波成分の振

幅であり，散乱角 θ_s は次式で決まる（図 1 参照）．

$$k\cos\theta_s = -p - s - mk_L \tag{17}$$

$s = 0$ とおけば，有名な回折公式

$$k\cos\theta_m = -p - mk_L \tag{18}$$

となる．ここで θ_m は m 次の回折角である．また散乱波 $\psi_s(x,z)$ は放射条件を満たし，無限遠点において外向の円筒波になると仮定する．鞍部点法を用いて式 (14) の積分を漸近評価すれば

$$\psi_s(r\cos\theta_s, r\sin\theta_s) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}A(-p-k\cos\theta_s)k \times \sin\theta_s \cdot e^{ikr-i\pi/4}, \quad r=\sqrt{x^2+z^2}\to\infty \tag{19}$$

となり，散乱波が遠方で $1/\sqrt{r}$ に比例して減衰することを表す．この性質 (19) は後に使用する．

フロケの形として知られているように，回折格子での回折波は平面波の和である．これに対し有限幅周期表面での散乱波は遠方で円筒波となり，放射条件を満たす．このように両者は物理的には全く異なる．

散乱・回折の理論には，エネルギー保存則と光学定理の２種類の保存則がある [14]．回折格子の理論では，1 周期当りの物理量として，エネルギー保存則が議論されることが多い．一方，有限幅周期表面の場合には，1 周期当りの物理量が定義できない．しかし，鏡面反射方向成分の減少分 $\mathrm{p_c}$ が全散乱電力 $\mathrm{p_{inc}}$ に等しいとの光学定理

$$\mathrm{p_c} = \mathrm{p_{inc}} \tag{20}$$

が成り立つ．$A(s)$ を用いると鏡面反射方向成分の減少分 $\mathrm{p_c}$ と全散乱電力 $\mathrm{p_{inc}}$ の具体的表現は

$$\mathrm{p_c} = -4\pi\beta_0(p)Re[A(0)]/k \tag{21}$$

$$\mathrm{p_{inc}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Phi_m \tag{22}$$

となる．ここで Φ_m は m 次の回折ビーム電力である．

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{k}\int_{-k_L/2}^{k_L/2} Re[\beta_m(p+s)]|A(s+mk_L)|^2 ds \tag{23}$$

また，m 次の相対電力 P_m を導入すれば，光学定理の正規化表現

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{P}_m = 1, \qquad \mathrm{P}_m = \frac{\Phi_m}{\mathrm{p_c}} \tag{24}$$

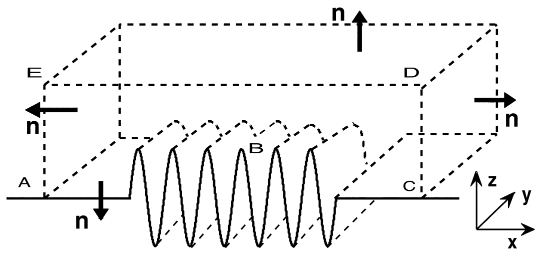

図 2　積 分 領 域
Fig. 2　Region of integration.

が得られる．光学定理 (20) はよく知られているものであるが [12]，回折ビームを用いた表現式 (22)，(24) は最近筆者が導入したものである．

次に，散乱の角度分布を表す散乱断面積 $\sigma(\theta_s|\theta_i)$ を導入する．

$$\sigma(\theta_s|\theta_i) = \frac{(2\pi)^2 k}{W}\sin^2\theta_s|A(-p-k\cos\theta_s)|^2 \tag{25}$$

ここで θ_s は散乱角である．また，式 (25) は単位面積当りの量を考えるため周期表面幅 W で割っている．

以上によりスペクトル $A(s)$ が分かれば，光学定理の関係や散乱断面積，回折ビームの相対電力が計算できることが分かった．次に，スペクトル $A(s)$ の計算法を考えよう．

3. Spectral formalism(SF)

SF では，境界上の二次波源（境界値とその法線微分）が散乱波を発生すると考える．以下では，補助関数と Gauss の定理を用いて，二次波源を決定する積分方程式を導き，また二次波源と $A(s)$ の関係を導く．

まず，波動方程式 (7) を満たす補助関数 $G^{(j)}$, $(j=1,2)$ を定義する．

$$G^{(1)}(p+s,x,z) = e^{i(p+s)x+i\beta_0(p+s)z}$$
$$G^{(2)}(p+s,x,z) = 2e^{i(p+s)x}\cos[\beta_0(p+s)z] \tag{26}$$

$G^{(1)}$ は上向きの平面波である．$G^{(2)}$ は $z=0$ のとき $\partial G^{(2)}/\partial z = 0$ を満たす定在波である．$G^{(2)}$ は，下向きの平面波とその鏡像としての上向きの平面波の和となっている．ここで，s が任意の実数であることに注意されたい．波動方程式 (7) から導かれる恒等式

$$\mathrm{div}[G^{(j)}\mathrm{grad}\psi_s - \psi_s\mathrm{grad}G^{(j)}] = 0 \tag{27}$$

を波状の底面をもつ箱領域で体積積分し，Gauss の定理を用いて表面積分に書き換えると (図 2 参照)

$$\int_{ABCDEA}\left[G^{(j)}\frac{\partial\psi_s}{\partial n}-\psi_s\frac{\partial G^{(j)}}{\partial n}\right]dl=0 \quad (28)$$

となる．ここでABCDEAはy方向に平行な4側面であり，nは外向きの法線である．

式(19)により散乱波が無限遠点で$1/\sqrt{r}$に比例して減衰するので，左右の側面に関して

$$\lim_{CD\to\infty}\int_{CD}=\lim_{AE\to-\infty}\int_{EA}=0 \quad (29)$$

が成り立つ．したがって式(28)から

$$\lim_{\substack{D\to\infty\\E\to-\infty}}\int_{DE}\left[G^{(j)}\frac{\partial\psi_s}{\partial z}-\psi_s\frac{\partial G^{(j)}}{\partial z}\right]dx$$
$$=-\lim_{\substack{C\to\infty\\A\to-\infty}}\int_{ABC}\left[G^{(j)}\frac{\partial\psi_s}{\partial n}-\psi_s\frac{\partial G^{(j)}}{\partial n}\right]dl \quad (30)$$

が導かれる．図2のように上面DEが外部領域にあるので，表現(14)を用いてDE上の積分が計算できる．$j=1,2$に対して計算すると

$$\lim_{\substack{D\to\infty\\E\to-\infty}}\int_{DE}\left[G^{(j)}\frac{\partial\psi_s}{\partial z}-\psi_s\frac{\partial G^{(j)}}{\partial z}\right]dx$$
$$=\begin{cases}0\ , & \text{for } j=1\\ 4\pi iA(s)\beta_0(p+s)\ , & \text{for } j=2\end{cases} \quad (31)$$

となる．一方，底面ABCでは，式(14)は発散するため使えない．そこで，底面上での境界値（二次波源）を未知関数として

$$b(x)=\psi_s(x,f(x)) \quad (32)$$

とおく．底面上での法線微分$\partial\psi_s/\partial n$は境界条件(8)から決定できる．すなわち，周期表面部分では

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial n}=-\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\ ,\ |x|<W/2 \quad (33)$$

であり，平たん面部分では，式(13)により

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial z}=-\frac{\partial\psi_0}{\partial z}=0\ ,\ |x|>W/2 \quad (34)$$

となる．これらの関係を用いて，式(30)右辺の積分を書き換え，式(31)を用いると$j=1$に対し，

$$-\lim_{\substack{C\to\infty\\A\to-\infty}}\int_{ABC}\left[G^{(1)}\frac{\partial\psi_s}{\partial n}-\psi_s\frac{\partial G^{(1)}}{\partial n}\right]dl$$
$$=\int_{-W/2}^{W/2}G^{(1)}\left(-\frac{df}{dx}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right)\bigg|_{z=f}dx$$
$$+\int_{-W/2}^{W/2}b(x)\left(-\frac{df}{dx}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial G^{(1)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=f}dx$$
$$+\int_{\mathrm{flat}}b(x)\frac{\partial G^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0}dx\ =\ 0 \quad (35)$$

が得られる．$j=2$に対しては

$$\int_{-W/2}^{W/2}G^{(2)}\left(-\frac{df}{dx}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right)\bigg|_{z=f}dx$$
$$+\int_{-W/2}^{W/2}b(x)\left(-\frac{df}{dx}\frac{\partial G^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial G^{(2)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=f}dx$$
$$=4\pi iA(s)\beta_0(p+s) \quad (36)$$

が得られる．$G^{(1)}$と$G^{(2)}$はsの関数であるので，式(35)，(36)は任意の実数sに対して成立しなければならない．このため，式(35)は，境界値$b(x)$を決定するスペクトル領域での積分方程式となる．一方，式(36)は$b(x)$から$A(s)$を計算する関係式である．

従来のSF [11]～[13] では，$G^{(2)}$として下向きの平面波を採用していた．TE波を扱った先の論文[10]では，鏡像法を用いて下向きの平面波とその鏡像としての上向きの平面波の和を$G^{(2)}$として採用した．すなわち，$G^{(2)}$として平面$z=0$上で境界条件$G^{(2)}=0$を満たす定在波を用いた．その結果，$A(s)$が表面凹凸部の境界値だけで表現できた．しかし，全波動場に対してGaussの定理を適用したため，関係式の導出に厳密性を欠いていた．すなわち，全波動場の構成要素である入射波と鏡面反射波は，その振幅が$|x|\to\infty$においても減少しないため，式(29)の性質が成り立たない．そこでCD及びEA上の積分を無視して，積分方程式を導いた．この欠点を克服するため，本論文では散乱波に対してGaussの定理を適用している．散乱波は式(19)の漸近形をもつため式(29)が成り立つ．その結果，厳密に式(35)，(36)を導くことができた．

式(36)の積分範囲が$(-W/2,W/2)$であることに注意されたい．これは，$A(s)$が周期表面部分の境界値のみで表現できることを表している．従来の積分方程式[4]では全表面上の境界値を用いて散乱波を計算していたが，本方法では$A(s)$を決定するには周期表面部分の境界値のみを求めればよい．これは，$G^{(2)}$として平面$z=0$上で境界条件$\partial G^{(2)}(p+s,x,z)/\partial z=0$を満たす定在波を採用したためであり，また，$A(s)$が外部領域における散乱波のスペクトルであるためである．更に，有限幅の積分であるので，$A(s)\beta_0(p+s)$も有限値となる．また，式(36)の両辺を$\beta_0(p+s)$で割

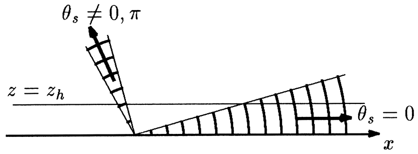

図 3　$\theta_s(\neq 0, \pi)$ 方向と $\theta_s = 0$ 方向に散乱される回折ビーム
Fig. 3　Diffraction beams scattered into $\theta_s(\neq 0, \pi)$ and $\theta_s = 0$ directions.

ると，$A(s)$ は因子 $1/\beta_0(p+s) = 1/\sqrt{k^2-(p+s)^2}$ をもち，レイリー波数 $p+s=\pm k$ において発散することが分かる．しかし，$A(s)$ の発散は散乱波の発散を意味しない．関数 $1/\beta_0(p+s)$ は可積分であるので，散乱波は外部領域で有限値をとる．このことを漸近形 (19) で見ると，$\theta_s \to 0,\ \pi$ の極限で $A(-p-k\cos\theta_s)$ は発散するが，因子 $\sin\theta_s$ のため散乱波の振幅因子 $\sin\theta_s A(-p-k\cos\theta_s)$ は常に有限値となる．

次に，$A(s)$ が発散する物理的原因を考えよう．回折ビームに $e^{i(p+s)x}$ を乗じて直線 $z=z_h(>\sigma)$ 上で積分して，スペクトルを求めよう．この概念を図 3 に示す．斜め上方 $(\theta_s \neq 0,\pi)$ に散乱される回折ビームと積分路 $z=z_h$ が交わる領域は有限幅である．有限幅の積分となるため，そのような回折ビームのフーリエ変換は，常に有限値をとる．しかし，$\theta_s=0$ の方向に散乱される回折ビームの場合，図より明らかに積分路（$z=z_h$）と交わる領域は半無限大となる．更に，$x > x_0 \gg z_h^2/(2\lambda)$ である x において，回折ビームの漸近形は $e^{ikr}/\sqrt{r} \approx e^{ikx}/\sqrt{x}$ に比例する．そこで，$e^{i(p+k+s)x}/\sqrt{x}$ を (x_0,∞) の区間で積分すると，積分値は因子 $1/\sqrt{p+s+k}$ をもつ．このため，$\theta_s=0$ の方向に散乱される回折ビームのフーリエ変換は，一般的には収束するが $p+s=-k$ のときだけは発散することになる．同様に，$\theta_s=\pi$ の方向に散乱される回折ビームのフーリエ変換は，$1/\sqrt{p+s-k}$ に比例する項をもち $p+s=k$ のときだけは発散する．以上の考察により，レイリー波数 $p+s=\pm k$ における $A(s)$ の特異性は，水平方向に散乱される回折ビームが存在するためであると結論できる．

4. 正弦波状の表面

式 (35) を数値的に解くため，表面凹凸上の $b(x)$ をフーリエ級数に展開し，フーリエ係数に関する連立方程式に変換する．まず，次のような関係を用いる．

$$b(x) = e^{-ipx}\int_{-\infty}^{\infty} B(s')e^{-is'x}ds' \quad \text{for } (-\infty < x < \infty) \tag{37}$$

$$= e^{-ipx}\frac{1}{W}\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{-imk_W x} \quad \text{for } \left(-\frac{W}{2} < x < \frac{W}{2}\right) \tag{38}$$

式 (37) は全表面上での境界値のフーリエ積分表現であり，式 (38) は有限幅周期表面上での境界値のフーリエ級数表現となっている．また $B(s)$ と B_m の関係は，次式となる．

$$B_m = \int_{-\infty}^{\infty} B(s)U(s-mk_W|W)ds \tag{39}$$

以上は厳密な関係式であるが，以下の数値計算では $B(s)$ が帯域制限された関数で近似でき，式 (38) も有限項のフーリエ級数で近似できると仮定し

$$B(s) = 0\ ,\quad |s| > k_B \tag{40}$$

$$B_m = 0\ ,\quad |m| > M_B \tag{41}$$

とおく．更に関数 $D_l(\alpha,v,\beta)$ と $D_l^{(2)}(\alpha,v,\beta)$ を次式で定義する．

$$e^{iqx+i\alpha z}\left(-\frac{df_p}{dx}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\right)e^{ivx+i\beta z}\Big|_{z=f_p} = e^{i(q+v)x}\sum_{l=\infty}^{\infty} D_l(\alpha,v,\beta)e^{ilk_L x} \tag{42}$$

$$D_l(\alpha,v,\beta) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ivx+i\alpha z}\Big(-\frac{df_p}{dx}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\Big)e^{ivx+i\beta z}\Big|_{z=f_p} \times e^{-ilk_L x}dx \tag{43}$$

$$D_l^{(2)}(\alpha,v,\beta) = D_l(\alpha,v,\beta) + D_l(\alpha,v,-\beta) \tag{44}$$

表面が式 (5) のように正弦波状の場合には関数 D_l は

$$D_l\ (\alpha,v,\beta) = i\beta J_l(\sigma(\alpha+\beta)) - \frac{i\sigma k_L v}{2}\times [J_{l+1}(\sigma(\alpha+\beta)) + J_{l-1}(\sigma(\alpha+\beta))] \tag{45}$$

となる．ここで J_l はベッセル関数である．

これらの関係式を用いると式 (35) と式 (36) は，

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Bigl[D_l^{(2)}(\beta_0(p+s),-p,\beta_0(p))U(s+lk_L|W) + \frac{1}{W}D_l(0,(p+s),\beta_0(p+s)) \times \sum_{m=-M_B}^{M_B} U(s+lk_L-mk_W|W)B_m\Bigr] - \frac{i\beta_0(p+s)}{W}\sum_{m=-M_B}^{M_B} U(s-mk_W|W)B_m + 2\pi i\beta_0(p+s)B(s) = 0 \tag{46}$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Bigl[D_l^{(2)}(\beta_0(p+s),-p,\beta_0(p)) + D_l^{(2)}(-\beta_0(p+s),-p,\beta_0(p))\Bigr]U(s+lk_L|W) + \frac{1}{W}\sum_{m=-M_B}^{M_B} B_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l^{(2)}(0,(p+s),\beta_0(p+s)) \times U(s+lk_L-mk_W|W) = -4\pi\beta_0(p+s)A(s) \tag{47}$$

となる．式 (46) にはフーリエ係数 B_m とフーリエ変換 $B(s)$ が混在している．そこで，式 (46) の両辺に $U(s-nk_W)/(2\pi i\beta_0(p+s))$ をかけて積分し，関係式 (39) を用いれば，B_n についての連立方程式

$$B_n + \sum_{m=-M_B}^{M_B} K_{nm}B_m = E_n \tag{48}$$

となる．ここで，K_{nm}，E_n はそれぞれ

$$K_{nm} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-k_B}^{k_B}\Bigl[-i\beta_0(p+s)U(s-mk_W|W) + D_l(0,(p+s),\beta_0(p+s))U(s+lk_L-mk_W|W)\Bigr] \times \frac{U(s-nk_W)}{2\pi i\beta_0(p+s)W}ds \tag{49}$$

$$E_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-k_B}^{k_B} D_l^{(2)}(\beta_0(p+s),-p,\beta_0(p)) \times U(s+lk_L|W)\frac{U(s-nk_W)}{2\pi i\beta_0(p+s)}ds \tag{50}$$

である．この連立方程式を解けばフーリエ係数 B_m が決定する．決定した B_m を式 (47) に代入すればスペクトル $A(s)$ が求められる．s を実数に限定していたが，B_m を数値的に決定後は，式 (47) により $A(s)$ を複素 s 平面上の関数とみなすことも可能である．

5. 数　値　例

連立方程式 (48) を数値的に解き，散乱特性を具体的に求めよう．以下の数値計算では，式 (40) と式 (41) における打ち切りパラメータを

$$k_B = 10.5k_L, \quad M_B = 10\times\frac{W}{L} \tag{51}$$

また，周期 L と幅 W を

$$L = 2.5\lambda\ ,\ W = 50\lambda = 20L \tag{52}$$

と設定した．

回折理論では，水平方向への回折が発生する入射角において Wood Anomaly が発生することがよく知られている．そのような入射角 θ_i を臨界入射角と呼べば，次数 m に対し

$$k\cos\theta_i + mk_L = p + mk_L = \pm k \tag{53}$$

を満たす．$L = 2.5\lambda$ の場合，90 度以下の臨界入射角は $\theta_i \approx 0°, 53.13°, 78.46°$ である．

以上の準備のもとで，有限幅周期表面による散乱特性を見ていこう．まず，光学定理の計算結果を図 4 に示す．ここでは，$\mathrm{p_c}$ と $\mathrm{p_{inc}}$ を入射角 $\theta_i = 1°$ から 90° の範囲で計算した．図から明らかに $\mathrm{p_c}$ と $\mathrm{p_{inc}}$ はよく一致している．数値計算においては光学定理に関する相対誤差 $(\mathrm{p_c}-\mathrm{p_{inc}})/\mathrm{p_c}$ は，σ の増加とともに増加することが知られている．計算の結果，$\sigma = 0.5\lambda$ のときでも相対誤差は 1%以下になっており，$L = 2.5\lambda$ の場合には σ が半波長以下であれば光学定理が精度良く成立することが確認できた．

図 4(a)，(b)，(c) をみれば，入射角が $\theta_i = 1°$ から増加するとき，臨界入射角 $\theta_i \approx 53.13°$ までは $\mathrm{p_c}$ と $\mathrm{p_{inc}}$ は増加することが分かる．また，臨界入射角 53.13°，78.46° の近傍で，全散乱電力がピーク，ディップをとっている．すなわち，有限幅周期表面では，Wood Anomaly が全散乱電力の急激な変化として現れることが分かる．また，図 4(a)，(b)，(c) では，ピークとディップの形状が異なっており，全散乱電力の最大値・最小値も異なっている．図 4(a)，(b)，(c) を比較すれば，$\sigma = 0.3\lambda$ の図 4(b) のとき，全散乱電力の最大値が大きくなり，$\sigma = 0.5\lambda$ の図 4(c) では，全散乱電力の最大値がむしろ小さくなっていることが分かる．

次に回折格子の場合と比較しよう．回折格子の場合には（文献 [14] の図 2 参照），$\theta_i \to 0$ の極限で全回折電力は 0 になる傾向がある．また，有限幅周期表面に

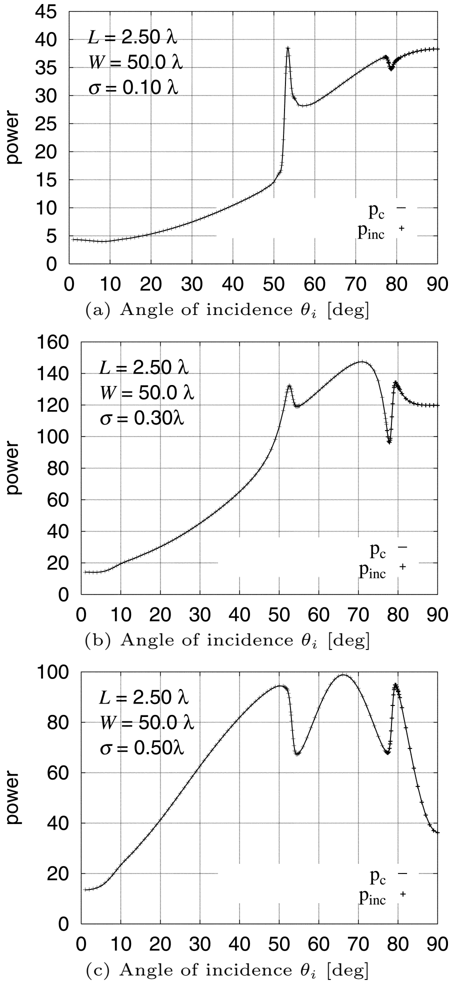

図 4　光学定理の入射角依存性 (a) $\sigma = 0.1\lambda$, (b) $\sigma = 0.3\lambda$, (c) $\sigma = 0.5\lambda$

Fig. 4　Optical theorem against the angle of incidence θ_i. $L = 2.5\lambda, W = 50\lambda$, (a) $\sigma = 0.1\lambda$, (b) $\sigma = 0.3\lambda$, (c) $\sigma = 0.5\lambda$.

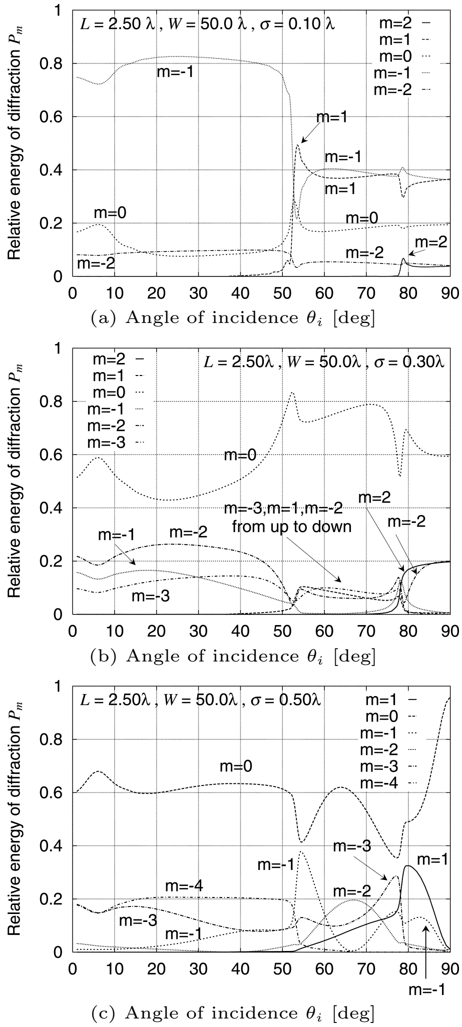

図 5　相対電力 $\mathrm{P_m}$ の入射角依存性 (a) $\sigma = 0.1\lambda$ (b) $\sigma = 0.3\lambda$, (c) $\sigma = 0.5\lambda$

Fig. 5　Relative power against θ_i. (a) $\sigma = 0.1\lambda$ (b) $\sigma = 0.3\lambda$, (c) $\sigma = 0.5\lambda$.

おける TE 波散乱の場合にも，$\theta_i \to 0$ の極限で散乱が発生しない．しかし，図 4 はそのような極限でも散乱が発生することを示唆している．これは，有限幅周期表面における TM 波散乱の特徴と考えられる．

図 5 は相対電力 P_m の入射角依存性を示す．これは，全散乱電力が回折ビームの各次数に配分される割合を表すものである．$\sigma = 0.1\lambda$ の図 (a) を見ると，主として ±1 次の回折ビームに散乱電力が配分されていることが分かる．これは，正弦波状の周期表面のためである．しかし，σ が大きい図 (b)(c) では，主として 0 次の回折ビームに散乱電力が配分されている．また，臨界入射角近傍で，各次数の相対電力が急激に変動する．このような変動は，回折理論における Wood Anomaly と一致しており，有限幅周期表面でも Wood Anomaly が発生することを表している．

再び，回折格子による TM 波の回折と比較しよう．回折格子の場合には，$\theta_i \to 0$ の極限で，0 次の相対電力は 1 となり，0 次以外の相対電力は 0 となる傾向がある [14]．しかし，有限幅周期表面の図 4 では，そのような極限でも 0 次の相対電力は 1 とならず，0 次以外の相対電力も 0 とはなっていないことを示唆している．

図 6 は，$\theta_i \approx 53.13°$ の臨界入射角に対する散乱断

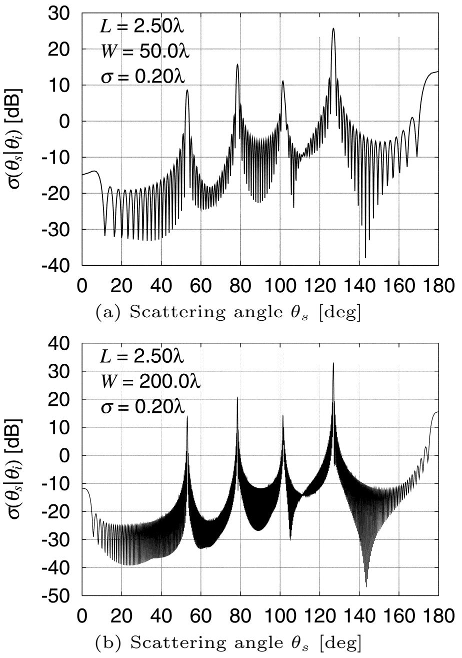

図 6 散乱断面積 (a) $W = 50\lambda$, (b) $W = 200\lambda$

Fig. 6 Scattering cross section (a) $W = 50\lambda$, (b) $W = 200\lambda$.

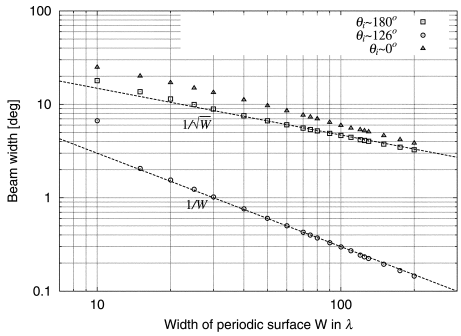

図 7 ビーム幅

Fig. 7 Beam width vs width W of corrugation

面積 $\sigma(\theta_s|\theta_i)$ を散乱角 θ_s の関数として描いたものである．各次数の回折ビームの主ローブが，$\theta_s = 180°$，126.92°，101.38°，78.42° 53.13°，0° のピークとして現れている．これらは，それぞれ，1 次，0 次，−1 次，−2 次，−3 次，−4 次の回折ビームのピークであり，その角度は回折公式 (18) による回折角とほぼ一致している．

TM 波の散乱断面積は TE 波のそれと以下の点で大きく異なっている．$\theta_s \to 0°, 180°$ の極限で，TE 波の場合には理論的に $\sigma(\theta_s|\theta_i) = 0$ となるが [10]，TM 波の場合には $\sigma(\theta_s|\theta_i) \geqq 0$ である．これは，TM 波の場合には水平方向への散乱が発生するが，TE 波の場合にはその方向への散乱が発生しないためである．

次に，回折ビームのビーム幅について考えよう．周期表面の幅を W とするとき，ビーム幅は $1/W$ に比例すると従来より指摘されている．実際，$W = 50\lambda$ の図 6(a) と $W = 200\lambda$ の図 6(b) を比較すれば，W が大きい場合には，ビーム幅は狭くなっている．しかし，$\theta_s \approx 180°, 0°$ の 1 次，−4 次の回折ビームは，ビーム形状が半分となっており，また，極端に広いビーム幅をもっている．水平方向に散乱される回折ビームに関しては，ビーム幅は $1/W$ に比例しないように見える．

そこで，種々の幅 W に対して散乱断面積を計算した．幅 W と回折ビームの半値幅（3 dB ビーム幅）の関係を図 7 に示す．これは，$\theta_i \approx 53.13°$ の臨界入射角とした場合の結果であり，参照のため，$1/W$ と $1/\sqrt{W}$ に比例する直線も描いている．鏡面反射方向に散乱される 0 次回折ビームのビーム幅は $1/W$ に比例しており，従来から知られた事実と一致している．しかし，水平方向に散乱される 1 次と −4 次の回折ビームに関しては，ビーム幅は $1/W$ に比例しない．図 7 から 180° 方向に散乱される 1 次の回折ビームでは，ビーム幅が $1/\sqrt{W}$ にほぼ比例することが分かる．

6. む す び

有限幅周期表面による TM 平面波の散乱問題を扱った．スペクトル領域の積分方程式は，周期 L が 2.5 波長の場合，表面凹凸が半波長程度以下であれば精度の良い解を与えることが分かった．従来の研究では散乱の入射角依存性や Wood Anomaly に関する詳しい議論はほとんどなされていなかったが，臨界入射角近傍での全散乱電力の急激な変動として，また，相対電力の急激な変動として Wood Anomaly が現れることを本論文は明らかにできた．更に，水平方向に散乱される回折ビームのビーム幅は周期表面の幅 W の平方根に逆比例する傾向があることが新たに分かった．

本論文では正弦波状の周期表面を取り扱った．他の表面形状の場合を解析すること，表面プラズモンの励振に関係して金属表面の場合を解析することなどは今後検討したい．また，水平方向に散乱されるビーム幅に関する理論的研究は今後の課題としたい．更に，有限周期表面の散乱特性と回折格子の回折特性を定量的に比較することも興味ある課題である．数値計算の結果，光学定理や回折ビームの相対電力は，臨界入射

角近傍を除いて回折格子のそれらと定量的にも類似点が多いとの結論を得ているが，これに関しては別稿で論じたい．

文　　献

[1] R. Petit, ed., Electromagnetic theory of gratings, Springer, Berlin, 1980.

[2] 山北次郎, 六島　克, "深い溝をもつ誘電体格子による平面波の散乱," 信学論 (B), vol.J66-B, no.3, pp.375–382, March 1983.

[3] J. DeSanto, G. Erdmann, W. Hereman, and M. Misra, "Theoretical and computational aspects of scattering from rough surfaces: One-dimensional perfectly reflecting surfaces," Waves Random Media, vol.8, pp.385–414, 1998.

[4] D. Maystre, "Rigorous theory of light scattering from rough surfaces," J. Optics(Paris), vol.15, no.1, pp.43–51, 1984.

[5] M. Tomita, "Thin-film waveguide with a periodic groove structure of finite extent," J. Opt. Soc. Am. A., vol.6, no.9, pp.1455–1469, 1989.

[6] K. Kobayashi and T. Eizawa, "Plane wave diffraction by a finite sinusoidal grating," IEICE Trans. Electron., vol.E74-C, no.9, pp.2815–2826, Sept. 1991.

[7] M. Tomita, T. Sakashita, and Y. Karasawa, "Analysis of scattering problem by an imperfection of finite extent in a plane surface," Papers of Technical Meeting, IEE Japan, EMT-04-94, pp.23–27, 2004.

[8] J. Nakayama, "Periodic Fourier transform and its application to wave scattering from a finite periodic surface," IEICE Trans. Electron., vol.E83-C, no.3, pp.481–487, March 2000.

[9] J. Nakayama and H. Tsuji, "Wave scattering and diffraction from a finite periodic surface: Diffraction order and diffraction beam," IEICE Trans. Electron., vol.E85-C, no.10, pp.1808–1813, Oct. 2002.

[10] J. Nakayama and Y. Kitada, "Wave scattering from a finite periodic surface: Spectral formalism for TE wave," IEICE Trans. Electron., vol.E86-C, no.6, pp.1098–1105, June 2003.

[11] J. A. DeSanto, "Scattering from a perfectly reflecting arbitrary periodic surface: An exact theory," Radio Science, vol.16, no.6, pp.1315–1326, 1981.

[12] J. A. DeSanto, "Exact spectral formalism for rough-surface scattering," J. Opt. Soc. Am, A, vol.12, no.12, pp.2202–2206, 1985.

[13] J. Nakayama, "Scattering from a random rough surface: Linear equations for coefficients of Wiener-Hermite expansion of the wave field," Radio Sci., vol.21, no.4, pp.707–715, 1986.

[14] J. Nakayama and A. Kashihara, "Energy balance formulas in grating theory," IEICE Trans. Electron., vol.E86-C, no.6, pp.1106–1108, June 2003.

（平成 16 年 10 月 27 日受付，17 年 1 月 21 日再受付）

柏原　　彩

2003 京都工繊大・電子情報卒．現在，同大大学院にて波動信号処理の研究に従事．日本音響学会学生員．

中山　純一　（正員）

1968 京都工繊大・電気卒．1971 京大大学院修士了．沖電気(株)入社．ディジタル無線システムの研究開発に従事．1975 京工繊大助手，現在，電子情報工学科教授．1983〜1984 トロント大 Visiting Resarch Associate．2002 から，Waves in Random Media の Editorial Board Member．波動散乱理論，超音波映像法，信号処理の研究に従事．IEEE 会員，The Institute of Physics フェロー．