

# 実数の連分数展開と Lagrange の定理

井川 治 (京都工芸繊維大学)

2018 年 5 月 18 日

大阪私学数学教育研究会  
於 大阪私学会館

## 概要

実数の連分数展開を説明した後、連分数展開が有限になるための必要十分条件は、その実数が有理数であることを示す。黄金数などの具体的な二次の無理数の連分数展開を例示した後、連分数展開が循環するための必要十分条件は、その実数が二次の無理数であることを主張する Lagrange の定理に証明を与える。

## 1 はじめに

$\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  や円周率  $\pi$  はいずれも無理数なので、それらの値は循環しない無限小数で表される：実際、これらの値は

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.414213562373095\dots, \\ \sqrt{3} &= 1.732050807568877\dots, \\ \pi &= 3.14159265358\dots\end{aligned}$$

となる。これらは不規則に数が並んでいるが、円周率  $\pi$  の値の計算には次のような美しい公式が利用できる。

公式 1.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

この公式は高校数学の範囲で示せるので、証明を与えておこう。

証明. 初項 1, 公比  $-x^2$  の等比数列の初項から第  $n$  項までの和は

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x^{2(i-1)} = \frac{1 - (-x^2)^n}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

$x$  について 0 から 1 まで積分すると,

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

ここで,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって, 主張が成り立つ. □

$\sqrt{2}$  や  $\sqrt{3}$  についてもこのような美しい公式はあるのだろうか?

## 2 連分数展開と Lagrange の定理

$x > 0$  に対して,  $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  と表す.<sup>1</sup>

$x$  が整数でないとき,

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}$$

により実数  $x_1$  を定めると,  $x_1 > 1$ .

$x_1$  が整数でないとき,

$$x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}$$

により, 実数  $x_2$  を定めると,  $x_2 > 1$ .

以下,  $x_n > 1$  まで定まったとする. この  $x_n$  が整数の場合と整数でない場合に分けて考える.

$x_n$  が整数, すなわち,  $x_n = [x_n]$  のとき,

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{[x_3] + \dots + \frac{1}{x_n}}}}$$

---

<sup>1</sup>記号  $[ ]$  をガウスの記号という.

を  $x$  の有限連分数展開という。このとき、この有限連分数を簡単に

$$[[x]; [x_1], \dots, [x_n]]$$

と表す。

$x_n$  が整数でないとき、

$$x_n = [x_n] + \frac{1}{x_{n+1}}$$

により、 $x_{n+1} > 1$  を定める。

いくつかの有理数  $\frac{q}{p}$  について連分数展開を調べてみよう。  $0 < \frac{q}{p} < 1$  と仮定して一般性を失わない。  $\frac{1}{p}$  という形の分数に対しては、これ自身が連分数展開である。そこで、3以上の自然数  $p$  と  $q = 2, 3, \dots, p-1$  に対して有理数  $\frac{q}{p}$  の連分数展開を考えよう。分母  $p$  を  $p = 3, 4, 5, \dots$  の順に、分子  $q$  を各  $p$  に対して  $q = 2, 3, \dots, p-1$  という順に動かして並べてみる。

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [0; 1, 2], \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = [0; 2], \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = [0; 1, 3], \\ \frac{2}{5} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [0; 2, 2], \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [0; 1, 1, 2], \dots \end{aligned}$$

この計算から次の命題が成り立つと推察される。

**命題 1.** 正の実数  $x$  が有限連分数で表される (すなわち、ある自然数  $n$  が存在して、 $x_n$  が整数となる) ための必要十分条件は、 $x$  が有理数となることである。

**証明.**  $x$  が有限連分数で表されれば、有理数となることは明らかである。逆に  $x$  を有理数とする。  $0 < x < 1$  となる有理数に対して主張を証明すれば十分である。  $x$  を既約分数で  $x = \frac{q}{p}$  ( $2 \leq p, 1 \leq q \leq p-1$ ) と表示し、2以上の自然数  $p$  に関する数学的帰納法で主張を示す。  $p = 2$  のときは  $q = 1$  であり、主張は成り立つ。  $p \leq n-1$  のとき結論成立と仮定して、 $p = n$  のときを考察する。0以上の整数  $k$  を

$$x = \frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{[\frac{p}{q}] + \frac{k}{q}}$$

により定めると、  $0 \leq k \leq q, q \leq p-1 \leq n-1$ 。よって、数学的帰納法の仮定より、  $\frac{k}{q}$  は有限連分数で表される。よって、 $x$  は有限連分数で表される。  $\square$

有理数  $\frac{q}{p}$  の有限連分数展開を求める手順は Euclid の互除法により  $p$  と  $q$  の最大公約数を求める手順と同じである。

例 1.  $\frac{177}{52}$  の有限連分数展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{177}{52} &= \frac{52 \cdot 3 + 21}{52} = 3 + \frac{21}{52} = 3 + \frac{1}{\frac{52}{21}} = 3 + \frac{1}{\frac{21 \cdot 2 + 10}{21}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{10}{21}} \\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{21}{10}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{10 \cdot 2 + 1}{10}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10}}} = [3; 2, 2, 10] \end{aligned}$$

以下,  $x > 0$  が無理数の場合を考えよう. 命題 1 より, 任意の自然数  $n$  に対して,  $x_n \notin \mathbb{Z}$  となっている.

$0 < x < 1$  となる無理数  $x$  に対して, 正の有理数の列  $\{a_n\}$  を

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{[x_1]}, \\ a_2 &= \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2]}} = \frac{[x_2]}{[x_1][x_2] + 1}, \\ a_3 &= \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{[x_3]}}} = \frac{[x_2][x_3] + 1}{([x_1][x_2] + 1)[x_3] + [x_1]}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

と定める. このとき, 数列  $\{a_n\}$  が  $x$  に収束することを示そう. まず, 右辺の表示は既約分数になっていることに注意する.  $a_n = \frac{q_n}{p_n}$  と既約分数で表示し, 自然数の列  $\{p_n\}, \{q_n\}$  を定める. 最初の数項を書いてみると,

$$\begin{aligned} p_1 &= [x_1], \quad q_1 = 1, \\ p_2 &= [x_1][x_2] + 1 = p_1[x_2] + 1, \quad q_2 = [x_2], \\ p_3 &= ([x_1][x_2] + 1)[x_3] + [x_1] = p_2[x_3] + p_1, \quad q_3 = [x_2][x_3] + 1 = q_2[x_3] + q_1 \end{aligned}$$

このことから次の命題が成り立つと推察される.

**命題 2.**  $n \geq 3$  のとき,  $p_n = p_{n-1}[x_n] + p_{n-2}$ ,  $q_n = q_{n-1}[x_n] + q_{n-2}$ .

自然数の列  $\{p_n\}$  は狭義単調増加で,  $p_n \geq n$  を満たす.

証明.  $n = 3$  のとき, 主張が正しいことは証明済である.  $n - 1$  まで証明できたとすると,  $a_n$  の分数表示は  $a_{n-1}$  の分数表示の  $[x_{n-1}]$  の部分を  $[x_{n-1}] + \frac{1}{[x_n]}$  に置き換えることにより得られるから,

$$a_{n-1} = \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{q_{n-2}[x_{n-1}] + q_{n-3}}{p_{n-2}[x_{n-1}] + p_{n-3}} \quad (\text{数学的帰納法の仮定})$$

より,

$$a_n = \frac{q_{n-2}([x_{n-1}] + \frac{1}{[x_n]}) + q_{n-3}}{p_{n-2}([x_{n-1}] + \frac{1}{[x_n]}) + p_{n-3}} = \frac{q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{[x_n]}}{p_{n-1} + \frac{p_{n-2}}{[x_n]}} = \frac{q_{n-1}[x_n] + q_{n-2}}{p_{n-1}[x_n] + p_{n-2}}$$

よって,  $\{p_n\}, \{q_n\}$  に関する漸化式が得られた.

$[x_n]$  は自然数で  $p_1 = [x_1]$  だから, 数列  $\{p_n\}$  は自然数の列である. 漸化式を用いて

$$p_n - p_{n-1} = ([x_n] - 1)p_{n-1} + p_{n-2} \geq p_{n-2} > 0$$

よって,  $\{p_n\}$  は狭義単調増加な自然数の列である. 特に,  $p_n \geq n$  となる. □

**命題 3.**  $n \geq 2$  のとき,  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$ .

証明.  $n$  に関する数学的帰納法による.  $n = 2$  のとき,

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = (p_1[x_2] + 1) - p_1[x_2] = 1$$

となり主張は成り立つ.

$n - 1$  まで証明できたとすると,

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (p_{n-1}[x_n] + p_{n-2})q_{n-1} - p_{n-1}(q_{n-1}[x_n] + q_{n-2}) \\ &= -(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\ &= -(-1)^{n-1} \quad (\text{数学的帰納法の仮定}) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

ゆえに, 主張が成り立つ. □

$$a_n = \frac{q_n}{p_n} = \frac{q_{n-1}[x_n] + q_{n-2}}{p_{n-1}[x_n] + p_{n-2}}$$

の右辺の  $[x_n]$  を  $x_n$  に置き換えると  $a_n$  は  $x$  に置き換わるから,

$$x = \frac{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}{p_{n-1}x_n + p_{n-2}} \tag{1}$$

次の定理から数列  $\{a_n\}$  が  $x$  に収束することがわかる. また, 次の定理は  $x$  と  $a_n$  の誤差  $|a_n - x|$  の評価も与えている.

定理 1.

$$|a_n - x| \leq \frac{1}{p_n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

特に、数列  $\{a_n\}$  は  $x$  に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ .

証明. 命題 3 より,

$$x - a_n = \frac{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}{p_n x_{n+1} + p_{n-1}} - \frac{q_n}{p_n} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{p_n (p_n x_{n+1} + p_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{p_n (p_n x_{n+1} + p_{n-1})}$$

絶対値をとり,

$$|a_n - x| = \frac{1}{p_n (p_n x_{n+1} + p_{n-1})} \leq \frac{1}{p_n^2 x_{n+1}} \leq \frac{1}{p_n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

よって、主張が示された。□

数列  $\{a_n\}$  の極限を  $[0; [x_1], [x_2], \dots]$  と表すと、上の定理は  $x = [0; [x_1], [x_2], \dots]$  と表される。このとき、任意の自然数  $m$  に対して、 $x + m = m + [0; [x_1], [x_2], \dots]$ 。この右辺を  $[m; [x_1], [x_2], \dots]$  と表す

$x = \sqrt{2}$  に対して、 $[x] = 1$ 。数列  $\{[x_n]\}$  を求めよう。

$$x = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

だから、任意の自然数  $n$  に対して、 $[x_n] = 2$ 。よって、 $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ 。

$x = \sqrt{2} - 1$  に対しては、 $\sqrt{2} - 1 = [0; 2, 2, 2, \dots]$ 。この式を用いて  $\sqrt{2} - 1$  の近似値を求めてみると

$$[0; 2] = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$[0; 2, 2] = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} = 0.4,$$

$$[0; 2, 2, 2] = \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{12} = 0.4166\dots,$$

$$[0; 2, 2, 2, 2] = \frac{1}{2 + \frac{5}{12}} = \frac{12}{29} = 0.4137\dots,$$

$$[0; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{1}{2 + \frac{12}{29}} = \frac{29}{70} = 0.41428571\dots,$$

$$[0; 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{1}{2 + \frac{29}{70}} = \frac{70}{169} = 0.41420118\dots,$$

$$[0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{1}{2 + \frac{70}{169}} = \frac{169}{408} = 0.41421569\dots,$$

以下、主に  $0 < x < 1$  を満たす無理数  $x$  について考えよう。たとえば、 $x = \sqrt{2} - 1$  のとき、

$$x = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = \dots = [0; 2, 2, 2, \dots]$$

$x = \frac{1}{2+x}$  より、 $x = \sqrt{2} - 1$  は 2 次方程式  $x^2 + 2x - 1 = 0$  の解になる。

上の  $x = \sqrt{2} - 1$  の場合を次のように一般化しよう。  $0 < x < 1$  が、自然数  $m$  に対して、関係式

$$x = \frac{1}{m + x}$$

を満たすための条件は、 $x$  が 2 次方程式  $x^2 + mx - 1 = 0$  の解となることである。この 2 次方程式を  $0 < x < 1$  の範囲で解いて、

$$x = \frac{\sqrt{m^2 + 4} - m}{2}$$

よって、上の  $x$  に対して、 $[x] = 0$ 。任意の  $n$  に対して、 $[x_n] = m$ 。すなわち、

$$\frac{\sqrt{m^2 + 4} - m}{2} = [0; m, m, m, \dots] \quad (2)$$

先の例は  $m = 2$  の場合である。  $m = 1$  とおくと、

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0; 1, 1, 1, \dots] \quad (3)$$

この式の両辺に 1 を加えると、

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

この式の左辺は黄金数 (golden number) と呼ばれ,<sup>2</sup> その近似値は 1.6180... である. (3) は黄金数の逆数の連分数展開になっている.

$m$  が偶数の場合を考えると,  $m = 2k$  とおき,  $x = \sqrt{k^2 + 1} - k$  に対して,  $[x] = 0, [x_n] = 2k$  が得られる.

$$\sqrt{k^2 + 1} - k = [0, 2k, 2k, 2k, \dots]$$

例えば,  $k = 2$  とすると,

$$\sqrt{5} - 2 = [0; 4, 4, 4, \dots]$$

$x = \sqrt{3} - 1$  に対しては,  $[x] = 0$  であり,

$$x = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+x}}$$

よって,  $n$  が奇数のとき  $[x_n] = 1$  であり,  $n$  が偶数のとき,  $[x_n] = 2$  となる. すなわち,

$$\sqrt{3} - 1 = [0; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

より一般に  $0 < x < 1$  が, 自然数  $m, l$  に対して

$$x = \frac{1}{m + \frac{1}{l+x}}$$

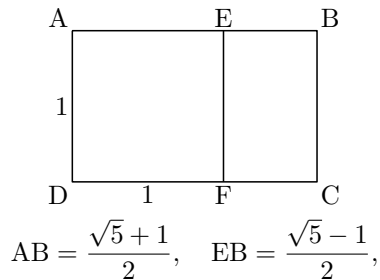
を満たすのは,  $x$  が 2 次方程式  $mx^2 + mlx - l = 0$  を満たす場合だから,

$$x = \frac{\sqrt{m^2 l^2 + 4ml} - ml}{2m}$$

よって, 上の  $x$  に対して  $[x] = 0$  であり,  $n$  が奇数のとき  $[x_n] = m$ ,  $n$  が偶数のとき,  $[x_n] = l$  となる. すなわち,

$$\frac{\sqrt{m^2 l^2 + 4ml} - ml}{2m} = [0; m, l, m, l, m, l, \dots] \quad (4)$$

<sup>2</sup>比  $1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  を黄金比, 縦と横の比が黄金比である長方形を黄金長方形という. 正五角形の一辺と対角線の比が黄金比になる.  $AD = 1, AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  の黄金長方形 ABCD を考える. 線分 AB 上に点 E を, 線分 DC 上に点 F を  $AE = 1, DF = 1$  となるようにとる. このとき, 四角形 AEF D は 1 辺が 1 の正方形である. 黄金長方形 ABCD から正方形 AEF D を取り除いた残りは長方形 EBCF である. 長方形 EBCF も黄金長方形になる.





特に  $l$  が偶数  $l = 2k$  の場合を考えると,

$$\frac{\sqrt{m^2k^2 + 2mk} - mk}{2} = [0; m, 2k, m, 2k, m, 2k, \dots]$$

$m = k = 2$  とおくと,

$$\sqrt{6} - 2 = [0; 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots]$$

**問 1.** (4) において,  $m = l$  の場合を考えることにより, (2) を示せ.

整数係数の 2 次方程式の解となるような無理数を二次の無理数という. 上のいくつかの例から次の定理が成り立つと推察される.

**定理 2.** [Lagrange<sup>3</sup>] 正の実数  $x$  が循環する無限連分数で表されるための必要十分条件は  $x$  が 2 次無理数になることである.

証明. ( $\Rightarrow$ )  $x$  が循環する無限連分数で

$$x = [a; a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, b_1, \dots, b_m, \dots]$$

と表されたと仮定する. この循環する無限連分数を簡単に

$$[a; a_1, \dots, a_n, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m]$$

と表す.  $y = [0; \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m]$  とおくと,

$$y = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_m + y}}}}$$

右辺は, 通分をすることにより, 0 以上の整数  $A, B, C, D$  ( $A > 0, C > 0$ ) を用いて,  $\frac{Cy+D}{Ay+B}$  と表されることが示される. よって,  $y$  は整数係数の二次方程式

$$y(Ay + B) = Cy + D \tag{5}$$

---

<sup>3</sup>Joseph-Lois Lagrange, 1736-1813, 仏, 著書「解析力学」(1788 年), 有限群論における Lagrange の定理も有名.

の解である。このとき、

$$x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + y}}}}$$

右辺は0以上の整数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ( $\alpha > 0, \gamma > 0$ ) を用いて

$$\frac{\gamma y + \delta}{\alpha y + \beta}$$

と表される。よって、

$$x = \frac{\gamma y + \delta}{\alpha y + \beta}$$

変形して  $(\alpha x - \gamma)y = \delta - \beta x$ .  $x$  は無理数だから、 $\alpha x - \gamma \neq 0$ . よって、 $y = \frac{\delta - \beta x}{\alpha x - \gamma}$ . これを (5) に代入すると、 $x$  の満たす整数係数の二次方程式が得られる。

( $\Leftarrow$ ) 逆に正の実数  $x$  を2次の無理数と仮定する。  $0 < x < 1$  と仮定して一般性を失わない。

以下の議論は多少複雑なので、まず方針を述べておく。

(I)  $x$  が整数係数二次方程式の解になることを利用して、各  $x_n$  もある整数係数二次方程式  $A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0$  の解になることをいう。

(II) 集合

$$\{A_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad \{B_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad \{C_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

がすべて有限集合になることをいう。

(III) 二次方程式の解は高々二個だから、(II) より、 $n \neq m$  が存在して、 $x_n = x_m$  となる。ゆえに連分数展開は循環する。

以上のことを順に示そう。 $x$  は整数係数のある2次方程式

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (A: \text{自然数}, B, C: \text{整数})$$

を満たす。(1) 式  $x = \frac{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}$  を代入して整理すると、 $x_n$  は整数係数の2次方程式  $A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0$  を満たすことがわかる。ただし、

$$A_n = Aq_{n-1}^2 + Bq_{n-1}p_{n-1} + Cp_{n-1}^2,$$

$$B_n = 2Aq_{n-1}q_{n-2} + B(q_{n-1}p_{n-2} + q_{n-2}p_{n-1}) + 2Cp_{n-1}p_{n-2},$$

$$C_n = Aq_{n-2}^2 + Bq_{n-2}p_{n-2} + Cp_{n-2}^2 = A_{n-1}$$

$A_n$  の定義より,

$$\frac{A_n}{p_{n-1}^2} = A \left( \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \right)^2 + B \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} + C = Aa_{n-1}^2 + Ba_{n-1} + C.$$

これと  $0 = Ax^2 + Bx + C$  との差をとり,

$$\frac{A_n}{p_{n-1}^2} = (a_{n-1} - x)(A(a_{n-1} + x) + B)$$

よって,

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq p_{n-1}^2 |a_{n-1} - x| (|A|a_{n-1} + x| + |B|) \\ &\leq A|a_{n-1} + x| + |B| \quad (\text{定理 1}) \end{aligned}$$

定理 1 より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$  だから,  $n$  を十分大きくとると,  $|A_n| \leq A(2x + 1) + B$ . よって, 集合  $\{A_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  は有限集合である.  $C_n = A_{n-1}$  だから, 集合  $\{C_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  も有限集合である. また,

$$B_n^2 - 4A_n C_n = (q_{n-1}p_{n-2} - p_{n-1}q_{n-2})^2 (B^2 - 4AC) = B^2 - 4AC \quad (\text{命題 3})$$

よって, 集合  $\{B_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  も有限集合である. ゆえに互いに異なる三つの自然数  $l, m, n$  が存在して,  $A_l = A_m = A_n, B_l = B_m = B_n, C_l = C_m = C_n$  が成り立つ. よって,  $x_l, x_m, x_n$  にうち少なくとも二つは等しくなる (たとえば,  $x_n = x_m$ ). ゆえに  $x$  は循環する無限連分数で表される.  $\square$

\*\*\*\*\* まとめ \*\*\*\*\*

任意の正の実数  $x$  は連分数展開できる.

$x$  が有理数  $\Leftrightarrow x$  の連分数展開が有限

$x$  が 2 次の無理数  $\Leftrightarrow x$  の連分数展開が循環

\*\*\*\*\*

上記の結果の証明は, はさみうちの原理など原理的には高校数学の範囲である.

## 参考文献

- [1] 杉浦光夫著, 解析入門 I, 東京大学出版会

\*\*\*\*\* [付録] 連分数展開を勉強した経緯について \*\*\*\*\*

京都工芸繊維大学は工学系の大学であるため数学科や数学専攻はありません。そのため数学教室の教員は通常は卒研を担当することはないのですが、学生が希望した場合にはこの限りではありません。昨年度(H29)は学生の希望があり、卒研を担当しました。卒研では[1]を読みました。1年かけて第I章の実数の部分を勉強しました。有理数体から実数体を構成することと、順序体としての実数体の特徴付けを学びました。節末に連分数に関する問題があり、任意の実数は連分数展開できることを学びました。Lagrangeの定理は学生がインターネットで調べてくれました。