【論　文】
UDC：711.7：711.73：625.7

日本建築学会計画系論文報告集
第 364 号・昭和 61 年 6 月

模式的道路網とそれを用いた最短巡回路の長さに関する考察

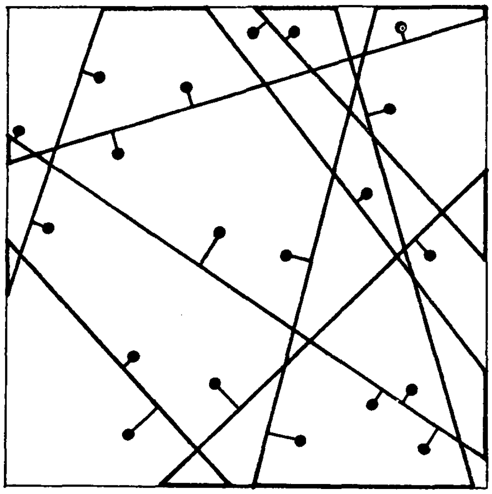
正会員　古　山　正　雄

1. 問題の構成

本稿で考察しようとする課題は，次の例題を用いて集約的に表現することができる。「対象領域内に n 個の地点がランダムに存在し，これら n 個の地点とは独立に，模式的道路網としての網の目がこの領域を覆っている状態を想定する。この時，n 個の地点を網の目を用いて巡回すると，全旅程の長さは高々どの程度と考えられるか。またその長さを最短化するには，どのような型の網の目が適当と考えられるか。さらには，その時の網の目の密度あるいは総延長はどれ位になるであろうか」。

本稿ではこの問題の解と解法を与え，そこから導かれる結果を都市計画研究からみてどのような意味があるのかを考察していく。そのためには，図—1 を参照しながらこの例題をより具体的にとらえることから始めなければならない。

n 個の点を巡回していくには，各点から最近隣の網の目に対して垂線を下し，これをアクセスとして用いる。つまり任意の 1 点から出発し，アクセスを伝わって網の目に到り，網の目上を第 2 点に向い，アクセスを用いて第 2 点に到り，再び網の目に引き返して第 3 点に向う。このようにして n 個の点を巡回するのである（図—1 参照）。ところで本稿では網の目として 3 つの型を使用する。すなわち，平行型と正方形型とランダムライン型である。そしてこれらの網の目を模式的な道路を表すモデルであると想定して議論を進めていきたい。この 3 種の網の目が道路の模式図とみなし得る根拠を示すことは大仕事であるが，平行型と正方形型は図式的にすぎるとはいえ，一応自然に思いつくモデル化だといえよう。問題はランダムライン型である。ランダムラインで構成される網の目の理論的性質は，参考文献 1) と 2) に詳しく報じられている。筆者はこれらの理論的結果をもとに，いくつかの都市の道路網を調査したが，両者は符合する点が多い。特に交差点間隔，交差点の角度の分布，交差



図—1　網の目を使った巡回閉路の例

点数と道路延長の関係は，理論値と実測値がよく合致している（参考文献 3) と 4)）。一応これらを根拠にランダムライン型も道路の幾何的持質を表現するモデルとみなして，以下の議論を行うことにする。

次に冒頭の例題と都市計画理論との関係を概観するために，ここで例題の解を提示しておく。

n 個の点を巡回する仕方は，次章以下で具体的に示すが，網の目の形をグラフ理論的に考察すれば，模式的道路網の各辺を頂度 1 回だけ使用し，かつ各点を 1 回だけ訪問する形の巡回路が得られることが解る。つまりこの巡回路の総延長は，模式的道路網の総延長とアクセス道路の往復路長の和になる。そこで領域を覆う網の目の総延長，あるいは網の目の型（パターン）を変化させた場合に，巡回路の長さにいかに影響を及ぼすのかという疑問が生じる。つまり模式的道路網を多く導入すれば，各点の周囲には多くの道路が生じ，アクセスの長さは一般に短かくなるだろう。しかし網の目の総延長は長くなるため，巡回路の長さは必ずしも短かくなるとは限らない。一方逆に，模式的道路網の量を少なくすると，網の総延長は短かくなるが，アクセス部分の路長が長くなるために巡回路の長さは必ずしも短かくはならないだろう。そこで導入すべき模式的道路網の量を操作することによって，巡回路の長さが最短化されることになる。もちろん網の目の量を調整する操作は，領域内の点の数に依存し

本稿では次の事実を理論的に考察する。面積 S の凸領域内に分布する n 個の地点を，模式的道路網を用いて一巡する時，この巡回路の長さは高々，$2\sqrt{nS}$ である。さらに巡回路の長さと道路網の型の関係について考察する。
* 京都工芸繊維大学　助教授・工博
（昭和 60 年 11 月 6 日原稿受理）

ているために，最短化した時の値は点の数の関数として表現される。この時アクセスと模式的道路網の長さとの比率は非常に単純な割合となることが示される。この結果の計画論的な考察は後で行うことにするが，単純化していえば，この議論はシビルミニマムや公的負担と私的負担の分担率といった考え方を想起させることを指摘しておきたい。

次に最短巡回路の長さに模式的道路の網の型がどのように影響するかという点であるが，結果からいえば，本稿でとり上げた3つの型については差異はみられないということが示された。つまり本稿のような条件下では，巡回路という使用方法からすれば，網の目の型はその長さに影響してこないのである。したがって，網の目の型の選択理由としては，巡回路長やその最短化といった観点は，あまり積極的な役割を果さないのかも知れない。

ところでこの問題とその解は，これとはまったく別の問題の解に関係していることを指摘しておきたい。本稿では，n 個の点をこれらの点とは独立に与えられた網の目を用いて巡回するのだが，n 個の点を直接に直線分で結んで巡回していく問題がある。両者は巡回路を扱う点で外観上似てはいるのだが，その解法や取り扱い手法はまったく異なるものである。後者，つまり n 個の点を直線分で結びつけた巡回路の最短値を求める問題の方は，一般的に最短閉路問題と呼ばれるものである。この問題は，理論解はもとより，最短閉路を構成するアルゴリズムについても，さまざまな分野で研究中であり，広く一般化した算法があるとはいえない状態にある。したがって，ミニマムスパンニングツリー（総延長最短の木[5),6)]）を求めるように，計算機実験にたよることができない。なぜなら，n 個の点の巡回路の数は，$\frac{1}{2}(n-1)!$ 通りあり，1つの最短閉路を見いだすためにも n^n 程度の試行回数が必要とされるため，最短閉路長の推定式を経験的に求めることは事実上困難な状況にある。ところが偶然にも本稿の結果は，部分的にではあるがこの問題に光をあてることになった。

本稿では，網の目を使った巡回路長は高々 $2\sqrt{nS}$（S は領域面積，n は点の数）という結果が得られた。網の目を用いた巡回路は，点を直線分で結んだ時の最短閉路よりも常に長くなるゆえ，最短閉路の長さは高々 $2\sqrt{nS}$ であるといってよい。この値は最短閉路の長さの上限値の1つにすぎないが，いつでもどこでも暗算によって概算値が求められるため，技法上の興味から紹介しておく。

なお，最短閉路問題は稿を改めて詳述する予定なので，ここでは深く立入らないが，私見では最短閉路の経験値は，$0.74\sqrt{nS}$ 程度になる模様である（参考文献7））。

以上の諸点が本稿で考察される課題である。これを一般化して言えば，幾何的条件の下で，最適な網の目の量を求める問題の1つであると言えよう。グラフ理論の用語でいえば，郵便配達等の巡回型のサービスを念頭において，ハミルトンサーキット[5),6)]の上限値を別の網の目のオイラーサーキット[5),6)]を用いて表す問題である。なお，グラフ理論や積分幾何学の用語は参考文献2），6）に従がった。

2. 平行直線と格子状パターンの場合

本章では領域の形状を1×1の正方形として議論を進めていく。これは議論を簡明にするための措置であり，一般の凸領域にも適用できる議論である。

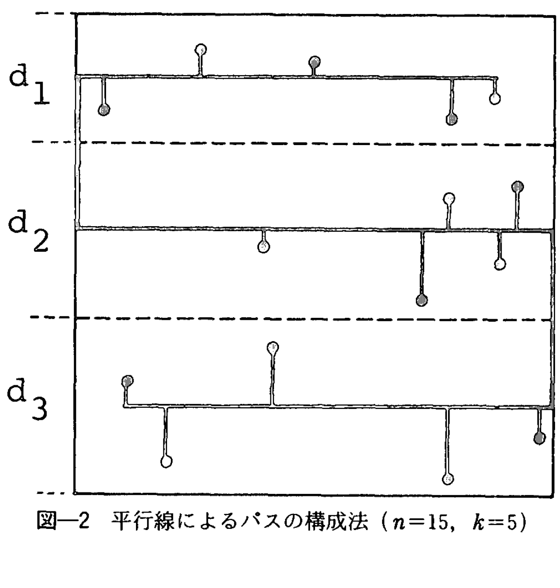
2-1　平行直線の場合

n 個の点がランダムに分布している1×1の正方形を考える。この正方形を1辺に平行な直線を使ってたんざく状に分割する。分割の仕方は，1つの矩形内に頂度 k 個の点が含まれるようにする。今 n 個の点があり各矩形内には k 個の点が含まれるようにしたのだから，矩形の数は約 n/k 個できるはずである。正確にいえば，$[n/k]$ である。ただし $[x]$ は x を越えない最大の整数+1を表す。さらに $[n/k]$ 本のたんざく状の矩形の幅を d_i で表すと，d_i は $\sum_{i=1}^{[n/k]} d_i=1$ をみたす。

さて次に1つの矩形，$d_i\times1$ をとり出してみる。そして短辺の中点を通り，長辺に平行な長さ1の直線分を引く。この矩形内の k 個の点から，今導入した直線分に垂線を下す。k 本の垂線の長さの総和は，高々（$k\times d_i/2$）である。同様に $[n/k]$ 本の矩形の真中に，長辺に平行な長さ1の直線分を1本づつ導入する。

われわれは今第1章で述べたように，n 個の点を巡るサーキットを構成する方法を述べていることを想起して欲しい。すなわち導入された $[n/k]$ 本の直線分を道路とみなし，各点から下ろした垂線をアクセスとみなす。こうして図—2のような n 個の点を巡るサーキットが得られる。

もう少し詳しく説明すると，各矩形内の k 個の点を垂線と導入された直線分で連結する。こうして得られる



図—2　平行線によるパスの構成法（$n=15$，$k=5$）

k 個の点を通過するパスの長さは，高々 $k\cdot(d_i/2)\cdot 2+1$ である。なぜなら，各点からの垂線を直線分へのアクセスとして往復2回使用するからである。次に導入された直線分の端点を交互に結合することによって，n 個の点を通過するパスが得られる（図—2では右端と左端）。この時 n 個の点を通過するパスの長さは，高々

$$1+\sum_{i=1}^{[n/k]}(kd_i+1)\leq k+n/k+2$$

このパスをサイクルにするためには，パスの両端点を結べばよい。その距離は正方形の外周に添って行けば高々2である。以上の考察から n 個の点を巡るサイクルの長さは高々

$$k+n/k+4 \cdots\cdots(1)$$

さてここで k という値に着目する。この値はわれわれが任意に導入した値であり，変数として操作可能な値である。今任意の正数 a, b に対し，$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ なる不等式が常に成立することから，（1）式の値は $2\sqrt{n}+4$ なる最小値をもつ。この考え方は Verblunsky (1951) が n 個の点を巡るミニマムサーキットの値の上限値を求める際に用いた方法に従うものである（参考文献8)）。本稿の文脈では，導入された直線分が道路を意味し，正方形の外周を外周道路として用いている。

ここで第1章で述べた諸点を確認しておく。まづ n 個の点を巡る道路を用いたサーキットの長さは，高々 $2\sqrt{n}$ 程度である（n が大きい時）。さらにここで導入するべき道路の本数 k は，上限値の最小化の操作により，$k=[n/k]$ の時，つまり $\sqrt{n}$ 本程度であることが解る。したがって導入された道路の総延長は，1本の長さが1であることから，大体 $\sqrt{n}$ の長さになる。

一方各点から引いた道路までの往復のアクセス距離の総和は，全体が $2\sqrt{n}$ であることから，大体 $\sqrt{n}$ の長さになる。つまり導入された道路網の総延長と等しくなるのである。また線的施設を建設する際には，この長さを問題にする場合，往復路を考慮しなくてよいために，アクセス分の総和は $\sqrt{n}/2$ となるであろう。

本節で考察した道路網というのは，現実には考え難いものである。つまり1方向に平行に走行する道路というのは，小住宅地での背割道路等が考えられるが，大きな領域では実例を見いだし難いかも知れない。しかし得られた結果は，ほかのパターンの網の目においても同じようになるのである。

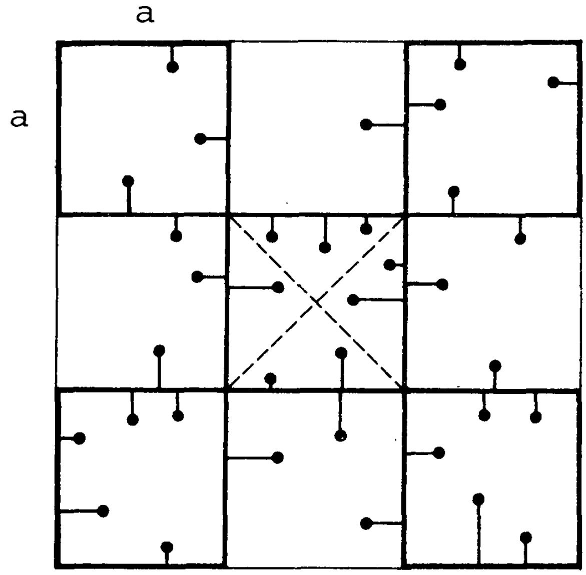
2-2　格子状パターンの場合

この節では直交する2方向に走る道路網を用いて，2-1節と同様の考察を行う。ただし各格子の大きさは正方形を想定して議論を進める。

1×1の正方形内に n 個の点がランダムに分布しているとする。次に格子を導入して正方形をさらに小さな正方形に分割する。この節では，この格子を道路網とみなすのである。この時，小さい方の正方形の1辺が a であったとしよう。そうすると1×1の正方形内に含まれる小さな正方形の個数は約 $1/a^2$ 個である。同じく長さ a の辺の数は約 $2/a^2$ 本である（境界線を含めれば，$2/a^2+4/a$）。さて n 個の点から導入された格子線までの最近距離を考える。2-1節では平行線までの距離を考えたが，この時は1方向にだけ注意を払えばよかった。今回は格子状に線があるために4方向に注意を払わねばならない。しかし格子の形状が正方形であることから，各正方形を対角線によって4つの3角形に分割してみると，各点はいづれかの3角形に属するように類別できる。したがって各点から格子線までの最近隣距離，つまり最短の垂線長を考えるに際して，1方向だけに注意を払えばよいことになり，取り扱いが極めて容易になる（図—3参照）。各点から格子線までの垂線長の期待値，$E(l)$ は0から $a/2$ までの範囲にあるが，この値は不等式

$$E(l)\leq a/4$$

をみたすことは自明である。



図—3　格子状パターン
1辺 a の小正方形への分割

したがって n 個の点からのアクセスの長さ（つまり最短垂線長）の総和は，高々，$na/4$ である。

他方導入された格子線の長さの総和は，1本の長さが1であり，約 $2/a$ 本導入されたのだから（正方形の外周を除けば）約 $2/a$ で与えられる。さらに，正方形の外周と導入された格子とで形成される図形のグラフ理論的性質を考えると，格子線相互の交点の次数は4，正方形と格子線の交点の次数は3である。そして正方形の外周上に生じた辺の本数は常に偶数である（4の倍数，ただし正方形の4つの角は頂点に含めない）。したがって，外周上の辺を交互に削除することができる。その結果得られたグラフのすべての頂点の次数は偶数である。つまり2か4となる。したがってこのグラフには常にオイ

ラーサーキットが存在している。オイラーサーキットとは，すべての辺を頂度1度だけ通る閉路のことである[5),6)]。

この閉路の長さは高々 $2/a$ 程度である。そしてこのオイラーサーキットを用いて，ほとんどすべての n 個の点を巡回することができる。正確には，正方形外周に面する約 $2/a$ 個の3角形内の点は通過できないが，無視された点の個数の全体に占める割合は，$(a^2/4)\times(2/a)=a/2$ 程度と推定されるゆえ極めて少ない（a の値は後程解るように非常に小さい）。

以上の観察から，n 個の点を導入された格子線を用いて一巡する全旅程の長さは，アクセスを往路復路に使い，格子線を頂度1回づつ使用することに注意すれば，高々

$$2/a+2(na/4) \cdots\cdots (2)$$

さらに2-1節と同様に，（2）式の値は $2/a=2\,na/4$ の時，つまり $a=2/\sqrt{n}$ の時に最小値 $2\sqrt{n}$ をとる。この時の格子状の直線分の本数は，約 $\sqrt{n}$ 本であり，正方形の直交する2辺に平行に，$\sqrt{n}/2$ 本づつが配置されるのである。平行直線のパターンと同様，この場合にもアクセス路の往復の総延長と，導入される格子線の総延長は等しい値となる。

さて平行パターンは1方向に，格子パターンは2方向にその方向性が限定されている。そこでこの方向性を自由にすることによってランダムパターンが得られる。次章ではこのパターンについて同様の考察を行う。

3. ランダムパターンの場合

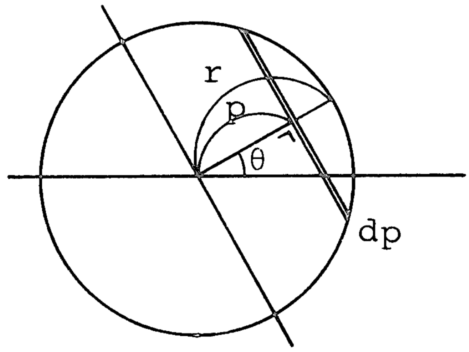
本章では，領域の形状を1×1の正方形から一般の凸閉曲線で囲まれた領域に変更する。つまり面積 S，周長 L の凸領域内に n 個の点が一様にランダムに分布しているとする。この領域に，ランダムラインで構成される網の目を導入し，この網の目を使って n 個の点を周回する。そしてこの巡回路の全旅程の長さの上限値を，2章と同じような方法で分析する。

ランダムラインの厳密な定義と，その幾何的性質は積分幾何学という分野で論じられてきている。特に参考文献1）では筑波大学腰塚助教授によって導かれた興味深い結果が提示されている。ランダムラインの一般的性質や積分幾何学の基礎理論についてはこれらを参照されたい[2),6),9)]。

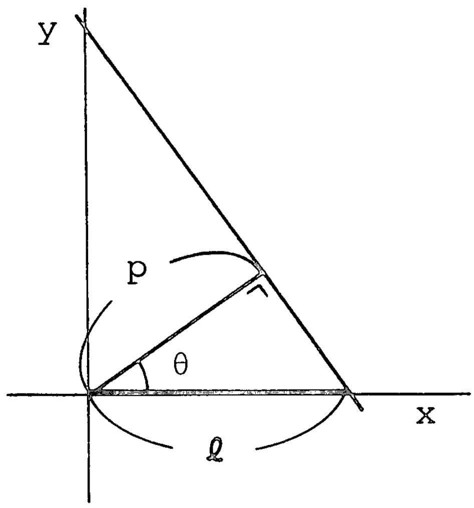
さて平面上の直線を極座標（p, θ）を用いて表す。p（≥ 0）は原点から直線までの垂線の長さ，$\theta(2\pi\geq\theta\geq 0)$ はこの垂線と x 軸のなす角度とすると，p, θ の値が決まれば，1本の直線が決まる。逆に1本の直線には，p, θ の1組の値が対応する。

そしてある直線の集合 K に対して，K の測度を

$$m(K)=\int_K dp d\theta$$



図—4　円に交わるランダムライン



図—5　線分に交わる直線の測度

なる積分で定義する。この値は平行移動と回転の変位をほどこしても変わらない（参考文献2），p.15）。だがこの式からは具体的な積分の方法が想像し難いので例で示そう。例えば半径 r の円に交わるすべての直線の集合を K_1 とする。上で定めた K_1 の測度 $m(K_1)$ は平行移動に対して不変であることから，極座標の原点を円の中心にとってよい。p と θ の値は互いに独立に変化し得るが，その範囲は，$(0\leq p\leq r)$，$(0\leq\theta\leq 2\pi)$ である。今 θ の値を固定すれば，p の値は0から r まで変わり得る。

$$m(K_1)=\int_{K_1} dp d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^r dp d\theta=2\pi r$$

つまり円の周長に等しい（図—4参照）。

次に長さ l の直線分に交わるすべての直線の集合 K_2 の測度 $m(K_2)$ を求めてみよう。今線分の1端点に原点をとり，線分に重ねて x 軸をとる（図—5参照）。このようにしても $m(K_2)$ の値は不変である。ここで p の値がとり得る範囲は，x 軸との角度 θ に関係している。つまり，$0\leq p\leq l\cos\theta$ である点に注意すると，

$$m(K_2)=\int_{K_2} dp d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{l\cos\theta} dp d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} l\cos\theta d\theta=2\,l\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta=2\,l$$

$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$ の範囲では $p=0$ に注意。このことから周

長 L の凸閉曲線に交わる直線の集合の測度 $m(K_3)$ が求められる。つまり周長 L を微少な直線分に分割してみる。つまり $L=\sum_i l_i$。各直線分に交わる直線の測度は直線分の長さの2倍，一方凸閉曲線と直線の交点数はほとんどすべての場合2であることから，

$$m(K_3)=\int_{K_3} dpd\theta=\frac{1}{2}\sum_i 2\, l_i=\sum_i l_i=L$$

となり，K_3 の測度は周長に等しくなる。以上の考察から次の結果を得る。

前提1. ある凸領域Aの中に，もう1つ別の凸領域Bが含まれているとする。Aの周長を L_1，Bの周長を L_2 とすれば，Aと交わる直線が同時にBとも交わる確率は

L_2/L_1

証明；Aと交わる直線の測度は L_1，Bと交わる直線の測度は L_2。ところでBと交わる直線は必ずAとも交わる。したがって求める確率は，L_2/L_1（参考文献2），p.17)。□

前提2. 周長 L の凸領域Aに，m 本の直線がランダムに交わっている。この時，A内の任意の1点から最近隣の直線までの距離，つまり垂線の長さを x とすると，x の密度関数は次の指数分布で与えられる。

$$f_x=\frac{2\,\pi m}{L}\,e^{-(2\pi m/L)x}$$

また距離 x の期待値は，$E(x)=L/(2\,\pi m)$。

証明；領域A内に半径 r の円を描いた時，m 本の直線のうち k 本がこの円と交わる確率は，前提1から

$$\binom{m}{k}\left(\frac{2\,\pi r}{L}\right)^k\left(1-\frac{2\,\pi r}{L}\right)^{m-k}$$

なる2項分布となる。今 $m/L=\rho$ とおいて，ρ を一定に保ちながら，$m\rightarrow\infty$ とすると，この確率は次のポアソン分布に近づく。

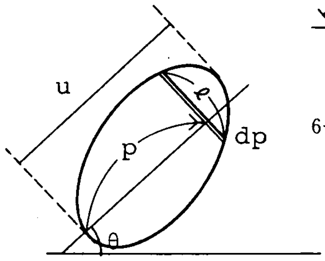
$$\frac{(2\,\pi r\rho)^k}{k!}\,e^{-2\pi r\rho}$$

さてA内の任意の1点 p から，距離 x のところにランダムラインが存在する確率は，$2\,\pi\rho\cdot dx$。（$m\cdot 2\,\pi(x+dx)/L-m\,2\,\pi x/L=2\,\pi\rho dx$）したがって点 p から距離 x にある直線が，p の最近隣直線となる確率は，$2\,\pi\rho e^{-2\pi\rho x}\cdot dx$。なぜなら点 p から距離 x 以内にランダムラインが存在しない確率は $e^{-2\pi x\rho}$ で与えられるからである。さらに x の期待値は

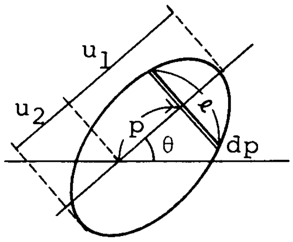
$$E(x)=\int_0^\infty 2\,\pi\rho x e^{-2\pi\rho x}dx=1/(2\,\pi\rho)$$

$\rho=m/L$ を代入して元に戻せば求める結果を得る。□

もう1つわれわれが必要としているのは，凸領域の弦の長さの期待値である。例として円の任意の弦の長さの期待値を算出してみる。半径 r の円に交わる直線の測度は，$m(K_1)=\int_{K_1} dpd\theta=2\,\pi r$ であった。今円によって切り取られるランダムラインは正しく1本の弦であり，



6-1 原点がAの外にある場合



6-2 原点がAの内にある場合

図—6 弦の長さの期待値

任意の弦は1本のランダムラインに対応している。そこで円によって切り取られるランダムラインの長さを l とすれば，$\int_{K_1} ldpd\theta$ の値は，平行移動と回転に対し不変である（感覚的にいえば，あらゆる弦の長さの総和ともいえる量。ただし，dp が乗じられているので次元は面積と同じになる）。この値は，

$$\int_{K_1} ldpd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r ldp\right)d\theta=2\,\pi\times\frac{\pi r^2}{2}=\pi(\pi r^2)$$

したがって弦の長さの期待値は，

$$E(l)=\frac{\int_{K_1} ldpd\theta}{\int_{K_1} dpd\theta}=\frac{\pi^2 r^2}{2\,\pi r}=\frac{\pi r}{2}$$

この考えを一般の凸図形に適用して次の結果を得る。

前提3. 面積 S，周長 L の凸領域Aの弦の長さの期待値 $E(l)$ は

$$E(l)=\frac{\int_K ldpd\theta}{\int_K dpd\theta}=\frac{\pi S}{L}$$

証明；今積分 $\int_K ldpd\theta$ において，K はAに交わるすべての直線の集合であり，l は1本のランダムラインがAによって切り取られる長さ，つまり弦の長さである。今極座標 p,θ の原点をAの外にとり，θ を任意の値に固定した時，$\int_0^u ldp\Big]_{\theta=\theta}=S$ であることが解るだろう（ただし，θ の方向によっては，ランダムラインがAと交わらない方向がある。この場合の積分値は0)。ここに u は θ 方向に投影したAの影の長さである（図—6参照)。同じく原点をAの中にとっても

$$\int_0^{u_1} ldp\Big]_{\theta=\theta}+\int_0^{u_2} ldp\Big]_{\theta=\theta+\pi}=S$$

となる。u_1+u_2 は θ 方向に投影したAの影の長さ。方向 θ による p の範囲に注意すれば，いづれの場合も，

$$\int_K ldpd\theta=\pi S$$

より厳密な展開は参考文献1）参照。□

さて本稿の主題である次の結果を示すべき準備が整っ

た。

定理4. 面積 S で周長 L の凸領域A内に n 個の点がランダムに分布している。今Aにランダムラインによる網の目を導入する。この網の目を使って n 個の点を巡回する旅程の最短値は，高々 $2\sqrt{n\cdot S}$ である。

証明；まずAの上に m 本のランダムラインを配してみる。そしてこれら m 本の線を使って n 個の点を一巡するサーキットを構成し，その長さを算定する。

各点から最近線へ垂線を下ろし，これをアクセスと呼ぶ。こうすれば，1つの点は1本の線に対応づけられる。したがって我々はランダムラインに添って n 個の点を巡るサーキットを構成することができる。

今A上に導入された m 本のランダムラインとAの境界線によってできた図形をグラフとみなす。つまり交点をグラフの頂点，交点間の線分をグラフの辺とみなすと，各頂点の次数は4である。ただしランダムラインと境界線の交点の次数は3である。ところがAの境界線は，ランダムラインによって偶数本の辺に分割される点に注意する。なぜなら1本の直線はAと2点で交わるからである（1点で接する確率は0）。そこで境界線上の辺を交互に除去していけば，その結果生じるグラフの頂点の次数は4または2となる。つまり各頂点の次数が偶数ということはオイラーグラフであり，各辺を頂度1回づつ通り，すべての辺を1巡するオイラーサーキットが得られる。

そこでこのオイラーサーキットを巡る道すがら，n 個の点をアクセスを使って訪問すれば，n 個の点を巡るサーキットが得られる。n 個の点は垂線によって最近隣線に結合されているので，各点を訪れる際，アクセスを往復2回使用することは2章と同じである。

ここでサーキットの長さを考察する。サーキットの構成の仕方から，アクセスの長さの総和とランダムラインの総延長に分けて考えればよい。

アクセスの長さの総和の期待値は，前提2より，

$$2\times(L/(2\pi m))\times n$$

他方ランダムラインの総延長の期待値は，前提3より

$$m\times(\pi S/L)+L/2$$

したがってサーキットの総延長は，

$$Ln/\pi m+\pi mS/L+L/2 \quad\cdots\cdots(3)$$

式（3）は $Ln/\pi m=\pi mS/L$ の時，つまり $m=\frac{L}{\pi}\times\sqrt{\frac{n}{S}}$ の時，最小値 $2\sqrt{nS}+L/2$ をとる。n の値が大きい時，この値は大体 $2\sqrt{nS}$ とみなしてよい。□

定理4の結果は，2章の2つの結果と比較してみれば興味深い。つまり直線の総延長が $\sqrt{nS}$，アクセスの総和も同じく $\sqrt{nS}$ の時に上限値の最小化が行われることに注意されたい。

4. 結果の考察と今後の展望

2章と3章で得られた主たる結果は，都市計画研究の中にどう位置づけられるのか，どのような計画理念と関係しているのか，さらにはどのような種類の具体的都市問題に寄与し得るのかといった点を整理しておく。

（i） まず n 地点を周遊する巡回路の長さを最短化するための網の目の量が示された。つまり，対象地区に対して巡回型のサービスを行う場合には，必ずしも道路量は多ければ良いということにはならないことを意味している。過剰な道路は必ずしも地域サービスに直結しないことの1例である。また研究面からいえば，この課題は適切な網の目の量を求める問題に属するものである。しかし網の目の特性を量的に記述すること自体が難しく，条件設定および解法を整理し，網の目を操作するといった研究課題を定式化することがそもそも困難な状況にあった。本稿は，極めて単純化した例題に還元することによって「最適な網の目の量」を求める問題の端緒を開こうとするものである。

（ii） さらに巡回路を最短化した場合のアクセスの長さと網の目の総延長の比率を示した。この結果は，巡回型のサービス水準を一定に保ちつつ，施設建設費用を最小化し，その時の費用構成比，つまりアクセスと道路，解釈によっては私的負担と公的負担の分担率を求めるといった問題に該当するものである。

（iii） さらに最短巡回路長は，網の目の型にほとんど影響されないことが示された。逆にいえば，網の目の型を選択する際の基準としては，巡回路の長さは積極的な役割を果さないことから，ほかの評価尺度を優先してよいのかも知れない。

道路に限らず一般に線的施設の特性は，長さと断面容量と結合パターンに分けて考えられる。これらの諸量を決めるには，社会的条件と空間的条件が必要となるのは当然のことである。特に幾何的条件は，都市空間の構造や平面形象を論ずる際の枠組を提供するものであり，これを捨象してしまうと，都市の2次元的拡がりはとらえられなくなるであろう。こうした観点から，本稿では空間的条件から諸結果を導いた。この結果を社会的条件なしに具体的問題に直接に結びつけるのは早計であるが，牛乳配達，新聞配達，郵便配達，道路清掃や除雪，ゴミ収集などの一連の問題群は，単純化すれば本稿の枠組に還元できる側面をもつ。本稿の結果はこれらの具体的課題に対する基礎的知見の1つとなるであろう。

参考文献

1） 腰塚武志：積分幾何学について（1）～（5），オペレーションズリサーチ，Vol. 21，No. 9～No. 12 および Vol. 22，No. 1，(1976，（5）のみ 1977)
2） 栗田 稔：積分幾何学，共立出版，(1956)
3） 古山正雄：都市究間の幾何学—都市の線的施設の分布法則に関するＬモザイクモデルの適用と実測例，本学会近畿支部研究報告集，昭和51年，pp. 397～400
4） 古山正雄：都市の形について，オペレーションズリサー

チ, Vol. 22, No. 1, pp. 20-25, (1977)

5) Bollobas, B. : Graph Theory-An Introductory Course, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. (1979)

6) ベルジュ, C. : グラフの理論 I, 伊理正夫他訳, pp. 193-203, サイエンス社, (昭和51年)

7) 古山正雄：都市空間の幾何学一ネットワークコンストラクションと長さの推定問題について, 本学会近畿支部研究報告集, 昭和52年, pp. 421-424

8) Verblunsky, S. : On the Shortest Path through a Number of Points, Proc. Amer. Math. Soc., 2, pp. 904-913, (1951)

9) Bosh, W. : A Procedure for Quantifying Certain Geomorphological Features, Geographical Analysis, Vol. X, No. 3, pp. 241-247, (1978)

SYNOPSIS

UDC : 711.7 : 711.73 : 625.7

ROAD NETWORK PATTERNS AND THE MINIMUM LENGTH OF A CIRCUIT

by **MASAO FURUYAMA**, Associate Professor, Department of Housing and Environmental Design, Kyoto Institute of Technology, Member of A. I. J.

We minimize the total length of the circuit through n points randomly placed by using road networks. The upper bound for the circuit length is given by $2\sqrt{nS}$ if S is an area of the convex region with n points. We also show that this upper bound is constant for various kinds of network patterns.