欠陥のある方形溝グレーティングからの散乱 (III) -TM 平面波入射-
Scattering from periodic grating with single defect (III) -TM plane wave incidence-

服部一裕、中山純一　(京都工芸繊維大学)
Kazuhiro Hattori and Junichi Nakayama (Kyoto Institute of Technology)

1.　はじめに

エレクトロニクスの領域では，メモリーチップや LCD 電極のように矩形のラインを平行に配置した素子が数多くあり，そうした周期構造の欠陥が重大な問題となっている．欠陥のある周期構造のモデルとして，本研究では次頁の図に示しているような周期的に配置された方形溝グレーティングに一つだけ欠陥がある表面を考える．そのような表面からの散乱は，欠陥の測定や検査の光学的方法を検討する上で重要である．

方形溝が一つある場合や方形溝が有限個ある場合，欠陥が無い周期的な方形溝グレーティングからの散乱や回折については多くの研究がされている．しかしながら，グレーティングに欠陥がある場合の散乱問題はほとんど研究されていない [1], [2].

本研究では，位置が既知である単一の欠陥を持つ一次元の方形溝グレーティングからの平面波の散乱を扱う．表面は完全導体で，方形溝が周期的に配置されており，欠陥の場所には溝が無い．モード展開法を用いて，溝の中の波動場を振幅を未知数とした導波モードで記述する．導波モードの振幅は，欠陥が無くグレーティングが完全に周期的である場合の解である “ベース成分” と欠陥があることによる “摂動成分” との和で書いている．先ず，第 1 ステップとして欠陥が無い場合の “ベース成分” を求める． 第 2 ステップとして，“ベース成分” を用いて “摂動成分” を求め，散乱場を求めるための 3 つの方法の方程式を導出している．

2.　問題の定式化

2.1　単一欠陥のあるグレーティング

周期的方形溝で $x=0$ においてのみ溝が形成されていない欠陥のあるグレーティングを考える (次頁の図参照). このような単一欠陥のあるグレーティング形状を以下の様に記述する．

$$z=f(x)=-d\left[\sum_{g=-\infty}^{\infty}u(x-gL|w)-u(x|w)\right]. \quad (1)$$

ここで，L は周期，d および w はそれぞれ溝の深さと幅である．

$u(x|w)$ は一つの方形溝で以下の様に定義する．

$$u(x|w)=\begin{cases}1, & |x|\le w/2,\\ 0, & |x|>w/2,\end{cases} \quad (2)$$

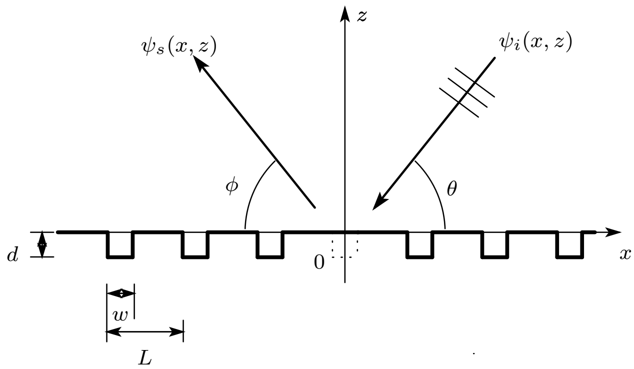

Fig 1　Scattering of TM plane wave from a perfectly conductive periodic grating with single defect. The surface is a periodic array of rectangular grooves and has a defect where a groove is not formed. $\psi_i(x,z)$ is the incident wave and $\psi_s(x,z)$ is the scattered wave. θ is the angle of incidence, ϕ is the scattering angle, L is the period of surface, w and d are the width and the depth of groove.

$$U(q)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x|w)e^{-iqx}dx=2\frac{\sin(qw/2)}{qw}w. \quad (3)$$

$U(q)$ は $u(x|w)$ の Fourier 変換である．グレーティングの周期 L と溝の幅 w を用いて k_L ，k_w を次のように定義する．

$$k_w=\frac{\pi}{w},\quad k_L=\frac{2\pi}{L}. \quad (4)$$

また，補助関数として $c_m(q)$ を以下の様に定める．

$$c_m(q)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x|w)\cos(mk_w(x+\frac{w}{2}))e^{-iqx}dx. \quad (5)$$

ここで， m は整数である．

入射する平面波の磁界の y 成分 $\Psi(x,z)$ は $z>f(x)$ の領域で Helmholtz 方程式を満たす.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right]\Psi(x,z)=0. \quad (6)$$

ここで, $k=2\pi/\lambda$ は波数である．表面は完全導体であるとする．このとき，波動場 $\Psi(x,z)$ は表面上 $z=f(x)$ で Neumann 条件を満たす.

$$\left.\frac{\partial\Psi(x,z)}{\partial z}\right|_{z=f(x)}=0. \quad (7)$$

次に入射平面波 $\psi_i(x,z)$ を以下のように書く．

$$\psi_i(x,z) = e^{ipx}e^{-i\beta_0(p)z}, \quad p = -k\cos\theta, \qquad (8)$$
$$\beta_m(p) = \beta_0(p+mk_L) = \sqrt{k^2-(p+k_Lm)^2}, \qquad (9)$$
$$Im[\beta_m(p)] \geq 0, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \qquad (10)$$

ここで，θ は入射角，Im は複素数の虚部である．

2.2　単一欠陥のある方形溝グレーティングからの散乱

散乱波は周期的なグレーティングに欠陥が存在することによって発生する．ここでは，そのような散乱波を完全に周期的な場合の回折波からの摂動として表す．すなわち，$z > 0$ の領域に対して

$$\Psi_1(x,z) = e^{ipx}e^{-i\beta_0(p)z} + \psi_d(x,z) + \psi_s(x,z), \qquad (11)$$
$$\psi_d(x,z) = e^{ipx}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ink_Lx+i\beta_n(p)z}, \qquad (12)$$
$$\psi_s(x,z) = e^{ipx}\int_{-\infty}^{\infty} a(s)e^{isx+i\beta_0(p+s)z}ds, \qquad (13)$$

と書く．ここで，$\psi_d(x,z)$ は欠陥が無いグレーティングによる回折波，A_n は回折波の振幅，$\psi_s(x,z)$ は欠陥による散乱波，$a(s)$ は散乱波の振幅である．散乱波 $\psi_s(x,z)$ は単一の欠陥によって散乱された波動場なので $\psi_s(x,z)$ は Sommerfeld の放射条件を満たす．

一方，溝の中の波動場 $\Psi_2(x,z)$ は，グレーティングが完全に周期的な場合の導波モードと，欠陥が存在することによる摂動項 $\psi_g(x,z)$ の和で書く．

$$\Psi_2(x,z) = \psi_g(x,z) + \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w)e^{ipgL}\sum_{m=0}^{\infty} Q_m^c \times\cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL))\cos(\gamma_m(z+d)), \qquad (14)$$
$$\psi_g(x,z) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w)e^{ipgL}\sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(g)} \times\cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL))\cos(\gamma_m(z+d)) - u(x|w)\sum_{m=0}^{\infty} Q_m^c cos(mk_w(x+\frac{w}{2}))\cos(\gamma_m(z+d)), \qquad (15)$$
$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - m^2k_w^2}. \qquad (16)$$

ここで，Q_m^c はグレーティングが完全に周期的な場合の導波モードの振幅で，これをベース成分と呼ぶ．γ_m は m 次の導波モードの伝搬定数，$q_m^{(g)}$ は g 番目の溝の中の m 次の導波モードの摂動分の振幅である．

2.3　3つの方法

第1ステップとして欠陥が無い場合の “ベース成分” である回折波の振幅 A_n と溝の中のモード振幅 Q_m^c を求める． 第2ステップで “ベース成分” を用いて “摂動成分” である散乱場を求めるが，そのための3つの方法を述べる．

A. $q_m^{(g)}$ の方程式

$$\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{g'=-\infty}^{\infty} C_{mg}(m',g')q_{m'}^{(g')} = \sum_{m'=1}^{\infty} Q_{m'}^s \times\left[C_{mg}(m',0) + \delta_{g0}\delta_{mm'}\frac{w}{2}\cos(\gamma_m d)\right]. \qquad (17)$$
$$C_{mg}(m',g') = (1-\delta_{g0})\frac{i}{2\pi}\frac{\sin(\gamma_{m'}d)}{\gamma_{m'}}e^{-ip(g-g')L} \times\int_{-\infty}^{\infty}\beta_0(s')s_m(-s')s_{m'}(s')e^{is'(g-g')L}ds' - \delta_{gg'}\delta_{mm'}\frac{w}{2}\cos(\gamma_m d). \qquad (18)$$

B. $a(s)$ の積分方程式

$$i\beta_0(p+s)a(s) + k_L\sum_{l=-\infty}^{\infty} M(s,s+lk_L|p)a(s+lk_L) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma_m}{2\pi}c_m(p+s)\sin(\gamma_m d)Q_m^c + \int_{-\infty}^{\infty} M(s,s'|p)a(s')ds'. \qquad (19)$$

ここで，$M(s,s'|p)$ はマスオペレータである．

$$M(s,s'|p) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma_m\tan(\gamma_m d)}{\pi w(1+\delta_{m0})}c_m(p+s)c_m(-p-s'). \qquad (20)$$

C. $G_m(s)$ の Fourier 変換の方程式

$q_m^{(g)}$ の Fourier 変換を $G_m(s)$ と書く．

$$G_m(s) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{-is'gL}q_m^{(g)}. \qquad (21)$$

$G_m(s)$ の方程式は，

$$k_L\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{c_m(-p-s'-lk_L)}{2\pi i\beta_0(p+s'+lk_L)}\sum_{m'=0}^{\infty}\gamma_{m'}\sin(\gamma_{m'}d) \times c_{m'}(p+s'+lk_L)\left(G_{m'}(s'+lk_L) - Q_{m'}^c\right) - k_L\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_m(-p-s)}{2\pi i\beta_0(p+s)}\sum_{m'=0}^{\infty}\gamma_{m'}\sin(\gamma_{m'}d) \times c_{m'}(p+s)\left(G_{m'}(s) - Q_{m'}^c\right)ds = \frac{w}{2}G_m(s')\cos(\gamma_m d)(1+\delta_{m0}) \quad (m = 0, 1, \cdots). \qquad (22)$$

これら3つの方程式は無限個の和あるいは無限区間の積分を含んでおり，解き方は分かっていない．数値計算による近似解法を今後検討していく．

文献

[1] K.Hattori and J.Nakayama, “Scattering of TE plane wave from periodic grating with single defect,”, IEICE TransElectron(In Press)
[2] 服部一裕, 中山純一, “欠陥のある方形溝グレーティングからの散乱 (II)-TM 平面波入射-”, 電磁界理論研究会資料,EMT06-130(2006)