5　地域間ネットワークの評価指標Uの値について

Evaluate Index　U　for　Regional　Networks

古山正雄
Masao Furuyama

In this paper, we define the evaluate index U of regional network patterns such that U=(Total fow of networks)/(Total stock of networks). We show that the network pattern for max U is a star graph when we use the graph distance of networks and then we compare the railway networks in Kinki region by index U.
We consider the value of index U in a case as n points randomly placed in a square in chap.4.

1．はじめに

本稿の研究主題は、地域と地域を結び付けるネットワークの評価指標Uの諸性質を明らかにすることである。地域相互を結び付ける結合パターンは無数に考えられるが、模式的に言えば、線形パターンや放射状パターンなどがその典型的なものであろう。[1)]従来こうしたパターン論は、おもに都市設計の資料として収集分類されてきたために、計量的な機能比較や性能評価と言った面からの研究は数少ない状態にある。[2), 3)]本稿では、地域結合パターンの計量的評価指標を定め、これを用いて様々なパターンを評価する方法を提案したい。

そのために、まず地域結合パターンの定め方から説明しよう。本稿でいう地域結合パターンとは、地域の代表点を結合するネットワークのことである。例えば、代表点として小学校や中学校などの公共施設、あるいは交通の結節点などを選ぶ。また代表点相互を結合するか否かは、代表点どうしが、道路や鉄道などなどの交通施設によって直接結ばれているかどうかによって決めてもよいし、また代表点の支配領域が隣接しているかどうかによって結合を定めてもよい。つまり本稿でいう地域結合パターンは、「代表点」とその「結合の仕方」によって決まるのであり、代表点や結合の仕方は、問題によって、適切なものを選択していけばよいのである。

次にこのようにして得られた地域間ネットワークを評価するために、どのようなパターンが適正であるのかという評価指標を設定しておく必要がある。本稿では、ネットワーク上のフローの総量とストックの総量とを考えて、両者の間のバランスのとれたネットワークを適正なパターンと考える。特に、ネットワーク上のフローの総量を、全ての二点間のグラビティ量の総和によって定め、与えられたネットワークのストック量をそのネットワークの総延長で表す。そしてネットワークのフローとストックのバランスを示す尺度として、その比をとる。つまり

U＝（フロー）／（ストック）
　＝（グラビティの総和）／（総延長）

で定義されたUの値を、ネットワークの評価指標と考えるのである。ネットワーク上のフローの総量をグラビティ量の総和で表す理由は、ネットワーク上の想定交通量をグラビティモデルで表そうという意図からである。これによって、不特定多数の人々がネットワークを使用する場合の一種の便益を表現したいと考えたからである。つまり、使いやすいネットワークとは、互いの２点間の距離が短く、想定交通量の多いネットワークのことである。

一方ネットワーク上のストック量として総延長を選んだのは、ネットワークの断面を一定と仮定すれば、ネットワークの建設費用やストック量を総延長で代表させることができるからである。　こうした観点からすれば、上記のUの値は、単位長当りの便益、あるいは長さ当りの使いやすさ、あるいは長さ当りの交通量といった意味を担っている。端的に言えばストックを得るための投資に対する便益の量、つまり投資効果と

正会員　京都工芸繊維大学住環境学科（Kyoto Institute of Technology)

いうことになる。

さて本稿は、上述の地域結合パターンとその評価指標Ｕを用いて、様々なネットワークの評価値を求め、更に、Ｕの値そのものの理論的考察をおこなう。特に第２章において、７種類の模式的なパターンを例にとり、それらのＵの値を求めてみる。更に最も単純化したモデルにおいて、Ｕの値を最大にするパターンや最小にするパターンを考察する。続く第３章においては、関西圏における私鉄各社のネットワークパターンを取り上げてＵの値を比較してみよう。第４章においては、Ｕの値そのものの最大値を理論的に考察する。即ち、一辺１の正方形内にｎ個の代表点が一様に分布している場合、これらｎ個の地点を結ぶネットワークのＵの最大値はどれ程であるのかを考察する。

２．模式的ネットワークのＵの値

本章では、図－１に示す７種類のネットワークパターンを例にとり、それらのＵの値を考察してみよう。特に、本章では２点間のグラビティ量を求めるに当たって、グラフ的距離を用いる。つまり、１辺の長さを１とし、２点間のネットワーク上の最短経路長を２点間の距離と定める。（言い換えれば、２点間のミニマムパスの辺の本数） 従って図－１の完全グラフの２点間の距離は、すべて１となる。

次に、２点ｉとｊの間の距離をr_{ij}とすると、ｉとｊの間のグラビティ量を、距離の逆数で定義する。つまり、ｉとｊの間の仮想交通量g_{ij}を

$$g_{ij}=1/r_{ij}$$

で定義する。従って、与えられたパターンのグラビティ量の総和Ｇは、

$$G=\sum_{i\neq j} g_{ij}=\sum_{i\neq j} 1/r_{ij}$$

で定義される。

一方与えられたパターンの総延長Ｌは、本章の場合各辺の長さが１であるから、正しく辺の本数となる。

$$L=\text{辺の総数}$$

つまりＵの値は、本章では、

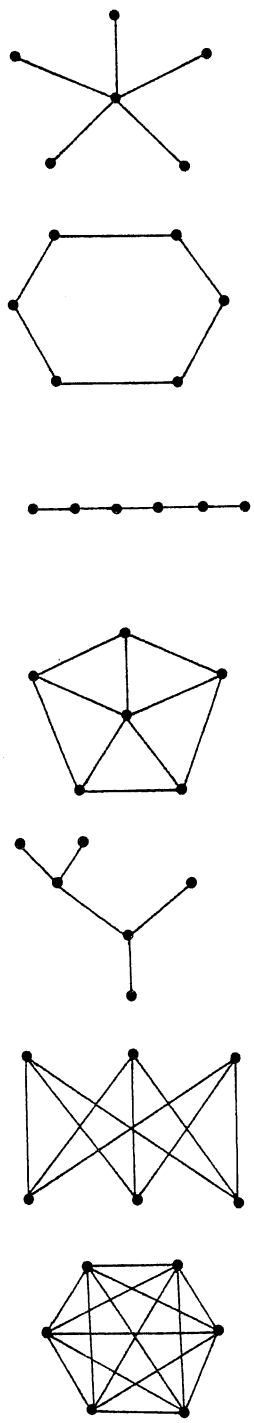
$$U=G/L=\left(\sum_{i\neq j} 1/r_{ij}\right)/L$$

で求められる。

例えば図－１－（３）のパターン、道について具体的にＧとＬとＵの値を計算してみる。

まずパターン道の総延長Ｌは、辺の本数であるから、Ｌ＝５である。次に、道のグラビティ量の総和Ｇを求める。Ｇは全ての２点間の距離の逆数の総和である。つまり、距離１の関係にある２点対、距離２の関係にある２点対、というふうにして、次々に距離５の関係ある２点対の個数まで求めてやれば、Ｇは容易に求めることができる。

$$G=(1)\cdot 5+(\tfrac{1}{2})\cdot 4+(\tfrac{1}{3})\cdot 3+(\tfrac{1}{4})\cdot 2+(1/5)\cdot 1=8.7$$



Ｇ＝１０ Ｌ＝５ Ｕ＝２．００
１－１　星

Ｇ＝１０ Ｌ＝６ Ｕ＝１．６７
１－２　輪

Ｇ＝８．７ Ｌ＝５ Ｕ＝１．７４
１－３　道

Ｇ＝１２．５ Ｌ＝１０ Ｕ＝１．２５
１－４　車輪

Ｇ＝９．３３ Ｌ＝５ Ｕ＝１．８７
１－５　根付木

Ｇ＝１２ Ｌ＝９ Ｕ＝１．３３
１－６　施設グラフ

Ｇ＝１５ Ｌ＝１５ Ｕ＝１．００
１－７　完全グラフ

図－１　パターン別のＧ，Ｌ，Ｕの値の例

従って、道のUの値は

$$U=G/L=8.7/5=1.74$$

ここで、指標Uの意味を振り返ってみると、Uの値は、総延長の割にグラビティ量の大きなパターン程大きくなる傾向がある。言い換えると、総延長に対してできるだけコンパクトであること、つまり２点間の距離が短くなるようなパターン程Uの値は大きくなる。こうした観点から図－１の各パターンを比較してみると次のような傾向が読み取れる。

① 星、根付木、道はいずれもL＝５である。この３者を比較すると、星、根付木、道の順にコンパクトなパターンであるといえよう。というのは、すべての２点間の距離のうちで最大のものをみてみると、星は２であり、根付木は３、道は５と漸増していく。このことから、グラビティの総量は、星が最も大きくなりそうであると推測される。事実、グラビティの総量Gの値は、星が２、根付木が１．８７、道が１．７４となっている。

② 星、根付木、道は、いわゆるツリー構造といわれるパターンで、辺の本数が極小な連結グラフである。つまり辺の本数は、（点の数－１）本である。ところで、図－１のパターンを辺の本数で区別すると、辺の本数が多くなるほど、Uの値は小さくなる傾向が読み取れる。

③ 特に、Uの値が最大となるパターンは星であり、最小となるパターンは完全グラフであった。

以上のような傾向を、更に一般化することができるであろうか。つまり、図－１では頂点数が６の小さなグラフで計算したのであったが、これを一般化して、頂点数がnの場合のことを考えてみよう。こうすることによって、上記①、②、③の観測結果は、次の主張にまとめることができる。

定理１．　n個の点を結ぶ全てのパターンのなかで、Uを最大にするパターンは、星である。同じくUを最小にするパターンは完全グラフである。つまりUの値は、$n/4+1/2 \geqq U \geqq 1$

証明。まずUの最小値から証明しよう。頂点数n、辺の本数がmのあらゆるパターンを考えてみる。我々はn個の点をすべて結び合わせて連結なパターンを考えているのだから、$m \geqq n-1$　でなければならない。次にn頂点のうち、すべての２頂点対の数Nは、明らかに、$N=n(n-1)/2$　である。

さて、頂点数n、辺の本数がmの任意のパターンの総延長Lは$L=m$、総グラビティ量Gは、$G \geqq m$　である。なぜなら、距離１の関係にある２点対の総数はちょうどm個であり、他の２頂点対は２以上の距離にある。

このことから、Uの値は、$U=G/L \geqq 1$　でなければならない。しかも$U=1$となるのは、完全グラフ、つまり、すべての２頂点が辺で結ばれている場合である。完全グラフの場合には、確かに

$$G=n(n-1)/2, \quad L=n(n-1)/2$$

となり、

$$U=G/L=1$$

を得る。

一方、Uの最大値を考えるには、Gの最大値を考えればよい。つまり、頂点数n、辺の数mの任意のパターンの総グラビティ量Gの最大値は、

$$G \leqq 1 \cdot m+\tfrac{1}{2}(N-m)$$

但し　$(N=n(n-1)/2)$

である。なぜなら、距離１の関係にある２点対は正しく辺の数mに等しい。だからその他の２点対がすべて、距離２の関係にあるとき、Gは上記の最大値をとる。

この時のUの値は、

$$U \leqq G/L=1+\tfrac{1}{2}(N/m-1)$$

つまりUの上限値はmの減少関数となる。今、連結性からmの最小値は$(n-1)$である。ゆえに

$$U \leqq 1+\tfrac{1}{2}(n(n-1)/2(n-1)-1)$$
$$=n/4+1/2$$

事実頂点数nの星は、Uの最大値を達成する。証明終。

定理１の意味するところは、本稿の問題を極端に単純化した場合、つまり一辺の長さを１とするグラフ上の距離を考えて、この距離の逆数によって、グラビティ量を表現する場合には、Uの値はかなり正確に分析できるということである。このような単純化、或は模式化は、以下の各章に示すモデルの原型となるものである。しかも２点間の距離については、介在機会数との対応づけを行うことによって、計画理論的な役割を担うことになる。

本章で考察した各種パターンと、そのUの値は、一辺の長さを１とするモデルに関するものであった。このモデルでは、定理１に示したように、木構造、特に星型がUの値を最大にする。次章では、各辺の長さに実距離を付与した、より現実的なネットワークの比較

評価を行う。実距離を用いたモデルでは、定理１の結論が保存されるか否かが問題となる。

３．私鉄網に関する事例分析

本章では、近畿圏における私鉄４社の駅の結合パターンを、評価指標Ｕを用いて相互に比較検討してみよう。これらは、木または閉路を若干含むパターンであり、前章の結果と比較すれば興味深い。図－２に示す４つのパターンは、各社の急行停車駅間の結合パターンである。今各駅間距離を営業距離を用いて表す。そして、２駅間のグラビティ量を営業距離の逆数の２乗で定める。つまり、各社の結合パターンについて、そのグラビティの総量Ｇ、総延長Ｌ、投資効果Ｕの値を計算する。但し、

$$G=\sum_{i\neq j} 1/(d_{ij})^2$$ d_{ij}；i,j間の最短経路長

$$L=\sum_{e_{ij}\in E} |e_{ij}|$$ $|e_{ij}|$；i,j間が辺e_{ij}で結ばれているときの辺の長さ。Ｅは辺の集合

$$U=G/L$$

まず総延長Ｌとグラビティ量Ｇとの関係をみてみると、表－１に示すとおり、Ｌの大きいものは、一般にＧも大きいことが解る。これはある程度予想されたことであるが、但し、阪急と南海ではＧの大きさは逆転している。

次にＵの値で比較してみると、阪急は非常に効果的なパターンをしていることが解る。つまり、路線延長に比して、グラビティ量が大きいパターンとなっている。

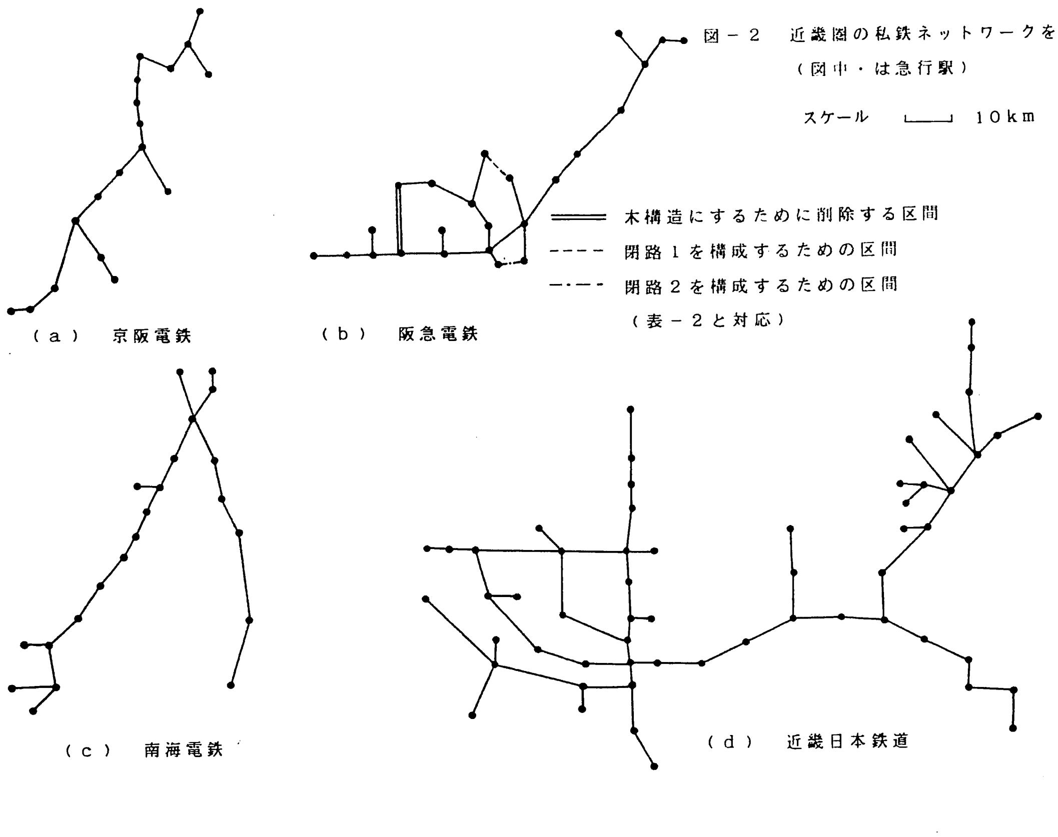
結合パターンを見てみると、（ａ）の京阪と（ｃ）の南海は、ツリー状構造となっていて閉路を含んでいない。一方（ｂ）の阪急と（ｄ）の近鉄は若干閉路を含んでいることが解る。つまり、前章では、辺の本数の少ない構造、特に星型のパターンがＵの値を最大にすることを確認したのだが、２点間の距離を実距離に直すと必ずしも辺の少ないツリー構造の方がＵの値を大きくするとは結論づけられないことが示された。それでは、Ｕの値を増加させるには、辺の数を増加させるべきか、減少させるべきか、またそれはどの辺を増

表－１　近畿圏の鉄道網の比較（ｋｍ単位）

U =G /L*100	総延長 L	営業距離 G	評価指数 U
京阪電鉄	197.8	1.924	0.972
阪急電鉄	243.4	2.620	1.076
南海電鉄	354.2	2.292	0.647
近畿日本鉄道	613.1	6.616	1.079

表－２　阪急電鉄網の考察

U =G /L*100	総延長 L	営業距離 G	評価指数 U	Δ Ud
（木）	235.7	2.531	1.074	-0.002
阪急電鉄	243.4	2.620	1.076	0.000
（閉路１）	244.7	3.281	1.341	0.265
（閉路２）	249.4	2.664	1.068	-0.008
（閉路１，２）	250.7	3.325	1.326	0.250



図－２　近畿圏の私鉄ネットワークを示す図
（図中・は急行駅）

減させればよいのかという疑問にぶつかる。

そこで、図２−（ｂ）の阪急を例にとり、もう少し詳しくパターンとＵの値を考察してみよう。つまり現状のパターンから辺を除去したり、付加したりした場合のＵの動きを観察してみる。（表−２及び図２−ｂ参照）　図２−（ｂ）の２重線で示した区間を除去してみると、全体は木構造になる。この時のＵの値は、わずかながら減少する。また破線部の区間を付加すると、現状よりもＵの値はかなり増加する。しかし一点鎖点の区間を付加してみると、Ｕの値は現状よりも低下する。

このような試行の結果から一般的結論を導くことはできないが、実距離を用いた場合には、おそらく木そのものよりも、木に若干の辺を付加したパターンがＵの値を最大化するのではないかと予想される。

４．Ｕの最大値について

２章と３章の考察を踏まえ、実距離を用いた場合には、Ｕの最大値はどの程度になるのか、という問題が浮かび上がってくる。本章では、この問題の理論的解を探っていく。より具体的に言えば、

「一辺１の正方形内にｎ個の代表点がランダムに配置されている。これらｎ地点を結ぶ任意のネットワークのＵの最大値はどれ程か。ｎの関数で表せ。」

と言うことになる。つまり、

$$U = G / L,$$

　：Ｇはネットワーク上のグラビテイの総和、

　：Ｌはネットワークの総延長、

と置くと、

$$\max U \leqq \max G / \min L$$

という関係が得られる。そこで本章ではｍａｘＵの上限値をｎの関数で表すという問題を解く。このためには、ｍｉｎＬとｍａｘＧを別個に求めてやればよい。

４−１　総延長Ｌの最小値

まず総延長Ｌの最小値ｍｉｎＬを代表点の個数ｎの関数で表す問題を考えてみる。一辺１の正方形内に一様にランダムに分布するｎ個の点を結ぶ総延長最小のネットワークは、最短木といわれる。この最短木の長さをｎの関数で表す問題については、すでにいくつかの研究がある。本稿の文脈に即して、実用的な視点から整理すれば、まず長さＬは、ｎの平方根に比例することが理論的に導かれる。　より正確には、

$$0.5\sqrt{n} \leqq L \leqq 2\sqrt{n}$$

であることを示すことができる。[4] そこで、

$$L = c\sqrt{n} \qquad c：定数$$

と置いて、定数ｃの値を計算機実験によって求めてみると、ｃはだいたい０．６８程度の値となる。（参考文献４）参照）

具体的に説明すると、本稿の実験ではｃの値は試行回数１００回の平均値であり、点の数ｎを１０から１００まで変化させてもかなり安定的であり、実用的には、

前提１。　　$L = 0.68\sqrt{n}$　・・・・（１）

と結論づけてよいだろう。

４−２　グラビティ量の総和Ｇの最大値

次に一辺１の正方形内にランダムに分布するｎ個の点を結ぶネットワーク上のグラビティ量の総和Ｇの最大値を観察する。Ｇが最大となるネットワークパターンは明らかに完全グラフである。完全グラフのグラビティ量の総和Ｇを正確に計算することは難しいが、Ｇの上限値は以下のようにして求めることができる。

まずｎ個の点の分布が一様にランダムだとしても、実際に位置が定まっているわけではないので、２点間のグラビティ量を、改めて次のように定める。ｎ個の点のうち、点ｉとｊのグラビティ量g_{ij}をｉとｊの距離の期待値$\overline{r_{ij}}$を用いて、

$$g_{ii} = 1 / (\overline{r_{ij}})^2$$

と定める。この定義に従えば、ｎ個の点のグラビティ量の総和Ｇは、

$$G = \sum_{i \neq j} g_{ij} = \sum_{i \neq j} 1 / (\overline{r_{ij}})^2$$

と書くことができる。

このまま直接的にこの計算を行うのは難しいが、領域形状が正方形であること、点の位置が中心部に近いか端部に近いかによって、他の点迄の平均距離が異なることに着目すれば、次の不等式が得られる。

$$G = \sum_{i \neq j} 1 / (\overline{r_{ij}})^2 \leqq (n/2) \sum_{k=1}^{n-1} 1 / (\overline{r_{0k}})^2$$

ここで$\overline{r_{0k}}$は正方形の中心にもっとも近い点を、点０と名付け、点１からみて近いものから順に１、２、・・、ｋ、・・、ｎ−１、と番号をつけたとき、点１と点ｋの平均距離を$\overline{r_{0k}}$と定めたものである。つまり中心部にある点と端部にある点を比較すれば、一般に中心部にある点から他点までの平均距離は、端部にある点から他点までの平均距離より短くなるという事実に着目し、全ての点が中心部にある場合を想定すれば、この不等式が得られる。（つまり境界条件のないポアッソン過程から導かれている）

さてこの不等式の右辺を計算するのはそれほど難しいことではない。というのは、よく知られているように、nの値が十分大きければ、5)

$$\overline{r_{\theta k}}=(2k-1)!!/2^{k}(k-1)!*\sqrt{1/n}$$

であることが導かれる。さらに、スターリングの公式を用いて簡略化すれば、

$$\overline{r_{\theta k}}\sim\sqrt{k/\pi}\sqrt{1/n}$$

が導かれる。この近似式を用いてGの上限値を算出すれば、

前提２　$G \leqq n/2 \sum_{k=1}^{n-1} 1/(\overline{r_{\theta k}})^{2}$

$$\sim \pi n^{2}/2 \sum_{k=1}^{n-1}(1/k) \sim \pi n^{2} \log n/2$$

が得られる。　・・・・・・・・（２）

4－3　ｍａｘＵの上限値

さて、４－１及び４－２で得られた結果を用いれば、ｍａｘＵの上限値は次のように計算できる。

定理２。　$\max U \leqq \max G/\min L$

$$\leqq (\pi n^{2} \log n/2)/0{\cdot}68\sqrt{n}$$

$$=2.3n\sqrt{n}\log n \quad \cdots (3)$$

ここでｍｉｎＬ及びｍａｘＧは、前提１及び２で算出した値である。

以上の値を、計算機実験による値と比較してみよう。即ち、一辺１の正方形内に１００個の点をランダムに散布し、それらの点を最短木で結合したときの、総延長Ｌｔ、グラビティ量の総和Ｇｔ、評価指標をＵｔとすれば、（但し試行回数１００回の平均値）

実験値：	式　（１）（２）（３）の値：
Ｌｔ＝６・７７	ｍｉｎＬ＝６・８
Ｇｔ＝３６７０７	ｍａｘＧの上限値＝７２２２０
Ｕｔ＝５４２２	ｍａｘＵの上限値＝１０６２０

となり、最短木に関するグラビティ量及び評価指標Ｕの値は、本章で求めた上限値の約５０％の値になっていることが示された。

5．考察

本稿では、地域相互を結合するネットワークの評価指標Ｕに関して考察を行ってきた。特に第２章では、もっとも単純なモデル、つまり１辺の長さが１というグラフ的な距離を用いた場合、Ｕの値が最大になるのは、星型のパターンであるという結論が理論的に示された。だが第３章で見たように各辺の長さが実距離の場合においては、必ずしも木というパターンがＵの値を最大にするとは限らないこと、むしろ、木に若干の辺を付加した単閉路、又は、２閉路のパターンの方がＵの値を大きくすることを確認した。

そこで第４章では、改めて正方形内にランダムに分布する点を結ぶ任意のネットワークについて、Ｕの最大値を考察し、Ｕの上限値を点の数ｎで表す式を得た。この値と最短木とを比較してみれば、Ｕの上限値はかなりあまいにもかかわらず、その約５０％程度の値を持つことが実験的に明らかになった。このように、各章で異なる距離単位を用いて考察してきたのだが、共通していえることは、Ｕの値を大きくするパターンは辺の数が比較的少ないものであることが予想される。

本稿ではネットワークの評価指標Ｕを、

Ｕ＝（総フロー）／（総ストック）

という単純な形で与えたのだが、それゆえにこそ様々なバリエーションが考えられる。つまり、辺の距離を実距離や時間距離に指定したり、各点に人口や面積などの重みを付与することによって、より現実的な問題への適用の可能性を持っている。本稿では、こうした条件を抽象して、各点の重みはすべて１の場合だけを考察してのだが、各点に重みを付与した場合の現実的なネットワーク評価の問題や、様々なネットワークタイプ相互のＵの値の計算機実験による比較については拙稿（６）を参照して頂きたい。

また、今後に残された最大の課題は、最適なネットワークはどの様な型であるか、という問題である。第２章の定理１は、最も単純な場合の解を与えるものであるが、さらに第４章で求めた　ｍａｘＵ　の値を達成するネットワークパターンはどのようなものであるかを探りださなければならない。

参考文献

1）　都市研究デザイン体著、（昭和４４年）現代の都市デザイン、彰国社編・刊、
2）　C.Alexander,(1965),City is not a Tree, Architecture Forum, 1965 -April,May.
3）　四茂野英彦、岡部篤行、（昭和６１年）無秩序網モデルにもとづく道路網の階層性の分析方法、都市計画学会学術研究論文集、第２１号 pp.210-216
4）　Gilbert,E.N.,(1965),Random Minimal Trees, S.I.A.M.J.math,13-2, pp.376-387
5）　Clark,P.J. and Evans,F.C.(1954) Distances to nearerstneighbor as a measure of spatial relationships in populations, Ecology,35,pp.445-453
6）　古山正雄、（昭和６３年）地域結合関係における木構造、日本建築学会計画系論文報告集、第３８４号、pp.63-71