27．地域間ネットワークにおける近隣木の長さについて

Theoretical study on the length of the neighborhood tree

古山正雄*
Masao FURUYAMA*

The main theme of this paper is to show the following three results. a; if the number of points is less than 20, almost all neighborhood trees are composed by just first nearest links and second nearest links. More concretely, the links of the third nearest neighbor will not be used. b; from this information, if N point-facilities are located randomly on 1x1 square, we can prove that the upper bound for the length of neighborhood tree on these N points is less than $0.695\sqrt{N}$.c; the length of neighborhood tree on these N points can be estimated as $0.666\sqrt{N}$
.

Keywords: Upperbound of Neighborhood tree, Lowerbound of Neighborhood tree, Minimum spanning tree
近隣木の長さの上限値、近隣木の長さの下限値、最短木

第１章　はじめに

本稿の主題は、都市内のｎ地区を結合してネットワークを形成するとき、｢近隣結合によってえられるネットワークの長さの期待値はどの程度であるか。長さの期待値の上限値や下限値はどの程度であるか。最短木の長さとどの程度の差があるか｡｣という問題を理論的に考察することである。

一般にｎ個の地区を結んで全体像を形作るためのネットワークの種類は膨大な数に上るが、理論的にその性質が知られているネットワークは少ない。本稿で考察する近隣木は、隣接性に基づいて形成されるネットワークであり、身の周りの局所的情報の積み重ねによって形成されるネットワークである。いわば、全体像をカッコに入れて、隣接性によって部分と部分を結合し、その結果として全体像が生じてくるタイプのネットワークである。

他方、最短木は、総延長が最小となるネットワークであり、全体の長さを最短にするという基準によって部分構造が選択される。部分は全体に奉仕し規制を受けるのである。このように、近隣木と最短木では、部分と全体の関係が互いに逆方向になっている点に着目しなければならない。非常に広義に解釈すれば、最短木は、経済合理性を表象するネットワークであり、近代的な性格を有するのに対し、近隣木は各点から見て近いものから順に選ばれるという点において、自然発生的であると同時に前近代的であり、合理的な全体像と部分の関係に無関心であるという点では、今日的であり、ポスト・モダン的である。

都市構造をネットワークで視覚化して分析を行う研究では、特定のネットワークに関する研究から、ネットワーク種別間の比較研究へと関心が移りつつある。本稿ではツリー構造の相互比較を行うが、とくに辺の構成比が木の種別や総延長にどのような差をどの程度もたらすかを検討する。

さてツリー構造には最短木、近隣木、有向近隣木などがあげられるが、与えられた点を結んだ長さで比較すれば、

最短木＜近隣木＜有向近隣木

となるはずである。最短木は無条件に総延長が最小のネットワークであるが、近隣木は、隣接性という条件下での最短性を求めるネットワークであり、有向近隣木は東西南北の方向性を決めて、東方向に近接している点を探索して得られる木である。つまり限定された方向での近隣性という条件下で最短性を求める木である。条件が設定されれば、それにしたがって探索範囲も限定されるためにネットワークの長さの期待値は長くなる。既存の結果を整理すると、(1)

$$\frac{1}{2}\sqrt{N}\ \text{＜最短木＜近隣木＜有向近隣木＜}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{N}$$

長年にわたり影響を保持してきたこの結果を改善し、

$$0.61\sqrt{N}\ \text{＜最短木＜近隣木＜}0.695\sqrt{N}$$

となることを示すことが本稿の技術的目標である。

一般にネットワークの長さの下限値はネットワーク形成の必要条件、上限値は十分条件に対応すると考えられる。すなわち上限値を示すには長さのわかるネットワークを造り出せば良いわけである。本稿の主張は、近隣木に関して、下限値の導出方法をそのまま用いて上限値が導けることを示すことにある。

近隣木とは、各点から見て、近い順に、第一近隣点、第二近隣点、第三近隣点、・・・へ辺を出していって全体を結びつけるツリー状のネットワークである。具体的には第一近隣辺の集合を短い順に並べておいて、次々と結合を行う。第一近隣辺をすべて試した後、第二近隣辺に移り、第二近隣辺を短い順に結合していく。第二近隣辺を使い終われば

正会員　京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科（Graduate School, Kyoto Institute of Technology）

表－１近隣木の辺の選出

頂点番号	1	2	3・・・・	j・・・・・	n
第１近隣点	D11	D12	D13・	・D1j・	・D1n
第２近隣点	D21	D22	D23・	・D2j・	・D2n
第３近隣点	D31	D32	D33・	・D3j・	・D3n
・・・・	・・・・・・・・・・・・・・・・・・・				
第i近隣点	Di1	Di2	Di3・	・Dij・	・Din
・・・・	・・・・・・・・・・・・・・・・・・・				
第n近隣点	Dn1	Dn2	Dn3・	・Dnj・	・Dnn

第三近隣辺に移る。ただし閉路が生じる場合や、すでに結ばれている（カップリング）場合には、その辺を棄却して次の辺を試す。全体が一つに結合されるまで結合作業を繰り返す。
表―１で説明すると、各点から近い順に、第一近隣点、第二近隣点という風に順序をつけた表を作る。この表では、点ｊにとって第ｉ近隣点までの距離をDij と表記してあるのでｉ行目が第ｉ近隣点の集合と対応している。近隣木を作るには、まず第１行のD1j の中の小さいものから順に選び出し、木の辺を結ぶ。辺が不足すれば、第二行に移り、第二行の短いものから順に選び出して木を作る作業を続ける。さらに辺が不足するなら第三行に移動して、全頂点が一つに結ばれるまでこの作業を続ける。
　ここで、本稿の結果を概観しておく。

結果１「頂点数Nが20個未満のとき、近隣木は第一近隣辺と第二近隣辺で構成され、第三近隣辺が使用される可能性はきわめて低い」
結果２「一辺１の正方形内にN個の点がランダムに一様分布しているとき、近隣木の長さの期待値は、$0.695\sqrt{N}-1/\sqrt{2N}$　以下と推定できる」
結果３「一辺１の正方形内にN個の点がランダムに一様分布しているとき、近隣木の長さの推定値は $0.666\sqrt{N}$　である。」

　結果１は近隣木の構成辺に関する情報である。すなわち第一近隣辺は必ず近隣木の辺として採用されるが、互いに重合する辺を一本と数えると、第一近隣辺は近隣木の辺の69%に相当する。近隣木の辺の残り 31%に関する分析を理論的に遂行するのは難しいが、計算機実験を併用すれば、近隣木の辺のうち第二近隣辺は26%であることが明らかとなる。この結果、近隣木の辺のうち95%は、第一近隣辺と第二近隣辺で構成され、第三近隣辺以降の辺は５％に過ぎない。[12] この点が本稿のアイデアの原点である。すなわち%表示を整数値に直すのである。頂点数が10のとき、10個の頂点を張る木の辺の本数は９本である。９本の５％は0.45 となり１に満たない。頂点数が 20 個の場合の木を考えた場合も、第三近隣辺の構成比率５％から考えると、第三近隣辺の本数は１本未満である。本数が１未満であるという情報を積極的に利用することによって、結果２を導くことが技術的な目的である。
　このための見通しを得るために、全体の流れを感覚的に説明しておこう。まず一辺が１の正方形内に1000個の点をランダムにばら撒く。次に正方形の全体に10*10 の正方形格子をかぶせると、各格子内にある点の数は、平均10個と期待できる。そこで100個の格子内それぞれにおいて、格子内に含まれる点だけを結んで100本の近隣木を作り出す。
　100 個の格子内それぞれにおいて作り出された近隣木の辺の総延長はどれほどか。さらに格子を跨いで100本の近隣木をできるだけ短い線分で結ぶとすれば、それらの線分の総延長はどれほどか。そして100本の近隣木の総延長とそれらを結ぶ 99 本の線分の総延長の和はどれほどになるか。結果２はこの問題の一般解なのである。この結果は、最短木の長さの上限値でもあり、従来の理論的上限値である（$\sqrt{2}/2$）$\sqrt{N}$ の改善案となっている。

第2章　近隣木の長さの下限値

　近隣木の構成方法から、近隣木に用いられる辺の構成比と長さに関する考察を行う。
　近隣木の辺は、第一近隣辺、第二近隣辺、第三近隣辺の順に選択されていく。また、近隣木の辺の本数は、（頂点数―１）である。一方、第一近隣辺は、各頂点から１本づつ出る辺であるから、頂点数と同数あるように思われる。しかし実際には、互いに第一近隣点同士となる場合には、第一近隣辺が重合するため、2 本を１本と数えなければならない。同じく第二近隣辺も、各頂点から１本づつ出て行く辺であるが、実際には、第二近隣辺同士が重合する場合と、第一近隣辺と第二近隣辺が重合する場合がある。これら重合辺は１本と数えなければならない。こうした事情を点の位置関係によって場合分けして幾何学的に重合辺の発生確率を考察する。だが理論的考察は見通しが良くないため、まず計算機実験による数値の確認からはじめる。
　1000 個の点を１＊１の正方形内に一様にランダムに配置する。これらの点を近隣木で結合する。近隣木の辺を第一近隣辺、第二近隣辺・・・・などに分けて、それらの構成率と平均長を出す。同じく点の個数を2000個にした場合の結果をまとめて表－２に示す。点の個数が1000の場合と2000の場合の差異はほとんどない。表－２の結果をより詳細にして近隣木の構成比率をまとめると次のようになる。

表－２ 近隣木の辺の構成比率と一辺の長さ(長さは$\sqrt{N}$ または$1/\sqrt{\rho}$を乗じる。参考文献１２)参照)

		第一近隣辺	第二近隣辺	第三近隣辺	第四以降
構成比	1000個	68.70%	25.87%	5.03%	0.40%
	2000個	68.94%	25.90%	4.90%	0.26%
長さ	1000個	0.550	0.890	1.045	1.165
	2000個	0.555	0.889	1.023	1.216

表—３　点の個数が少ない場合の近隣木の辺の構成比率

頂点の数	第１近隣辺	第２近隣辺	第３以降辺	近隣木の長さ	最短木の長さ
8	81.42%	18.57%	0.00%	6.843	6.840
9	81.25%	18.75%	0.00%	6.923	6.923
10	80.00%	20.00%	0.00%	7.033	7.033
11	79.00%	20.00%	1.00%	7.133	7.018
16	73.00%	20.67%	6.33%	6.858	6.812
18	72.94%	20.59%	6.47%	6.984	6.942
20	74.21%	18.42%	7.37%	7.075	7.050
1000	68.69%	25.87%	5.30%	6.650	6.569
2000	68.94%	25.90%	5.11%	6.661	6.569

前提１　近隣木の辺の平均構成比率として以下の数字を用いる。

第一近隣辺は68.94%、第二近隣辺は25.90%、
第三近隣辺は4.90%、第４近隣辺は0.23%、
第五近隣辺以降は0.03%　である。

本稿の以下の議論はこの前提１にもとづいて行われる。さらに前提１は、次のことを含意している点に着目しなければならない。すなわち、頂点数が10以下の場合、構成辺は第一近隣辺と第二近隣辺だけからできていると想定される。というのは、第三近隣辺以降の辺が使用される可能性が５％程度であるが、５％が１本の辺として実現するためには頂点数は２０以上と想定するのが適当であるからだ。この事実を確認するために行った計算機実験の結果を表－３に示す。頂点数を８から２０まで変化させながら近隣木を作成し、第一近隣辺、第二近隣辺、第三近隣辺の本数を計算してみると、第三近隣辺はほとんど生じていない。実際表－３から頂点数が10以下の場合には、近隣木は第一近隣辺と第二近隣辺だけから構成され、第３近隣辺が使用されることは極めてまれであることが判る。頂点数が20程度の場合にも、近隣木のうち約半数は第二近隣辺までで構成される。表－３から構成比率だけでなく、近隣木の長さの期待値の下限値に関する情報が得られる。

前提２　近隣木の長さの期待値の下限値は、
頂点数>20のとき：$0.66\sqrt{N}$
頂点数<20のとき：$0.61\sqrt{N}$

解題：近隣木の長さの期待値を算出するためには、次のように計算するのが妥当であろう。

（第一近隣辺の使用率・第一近隣辺の平均長・頂点数）
＋（第二近隣辺の使用率・第二近隣辺の平均長・頂点数）
＋（第三近隣辺の使用率・第三近隣辺の平均長・頂点数）
＝（$0.69 \cdot 0.55\sqrt{N}$）
　＋（$0.26 \cdot 0.89\sqrt{N}$）＋（$0.049 \cdot 1.02\sqrt{N}$）
$=0.66\sqrt{N}$

ここで、第三近隣辺が生じない場合には、第三項を消去して、$0.61\sqrt{N}$ という結果が得られる。

第3章　近隣木の長さの上限値

第２章の結果を直接適用することによって、近隣木の長さの上限値を解析的に導くことができることを示すのが本章の目的である。一般に、ネットワークの上限値を示すには、そのネットワークを構成的に作り出し、その長さを示すのが一般的である。言い換えれば、長さの判るネットワークを一つの事例として示すことができればよいわけである。本稿では、一辺１の正方形内にＮ個の点がランダムに配置されている場合を想定する。これらＮ個の点を結ぶ近隣木の長さの期待値を直接導出できれば目的は達成されるのだが、実際にはそれは難しい。次善の策として、ランダムに配置されたＮ個の点を結ぶ近隣木の長さの上限値の一つを得る方法を示す。

（ａ）特に個数Ｎの値が大きいとき、各セルに平均m個の点が入るように、正方形のセルに分割する。
（ｂ）各セル内の点の個数Ｘは、平均mのポアソン分布をする。
（ｃ）各セル内で近隣木を構成する。
（ｄ）その近隣木を縦横につなげて、Ｎ個の点をつなぐツリー状のネットワークを作る。

本章の目的はこのツリー状のネットワークの長さを推定することである。

平均mの値が20未満の時、第三近隣辺は５％未満となり、実数としては１に満たない。したがって、第二近隣辺までで近隣木が形成される可能性が高い。また前提２において個数Nが大きいときを想定して計算した$0.66\sqrt{N}$という値には、第三近隣辺も５％含有しているという前提の数値であり、上限値の推定には安全側の値となる。

では平均m個の点が入るように、正方形セルに分割し、各セルごとに近隣木を作ったとき、全近隣木の長さはどの程度に見積もるのが適当であろうか？

具体的な事例で考えてみよう。一辺１の正方形内に1000個の点をランダムにばら撒き、一辺が(1/10)の10＊10の正方形格子をこの上にかぶせる。正方形セルの個数は100であり、各セル内には平均10個の点が存在すると期待できる。より正確には、セル内に含まれる点の個数は平均10のポアソン分布にしたがうと考えられる。つまり、セル内に８個しか含まれない場合もあるが、そうした場合の確率は、ポアソン分布を用いて、$(10^8/8!)\,e^{-10}$ と計算できる。一方、セル内の８個の点を連結して近隣木を形成したときの近隣木の長さの期待値の上限値は、セルの一辺の長さが、１/１０であることに注意すると（$0.66\sqrt{8}$）(1/10) と推定できる。

この状況を一般的に展開していく。

いま全体の点の個数はNであり、各セル内の点の平均値がmであるという２つの数値だけが与えられている。このときセルの個数は、N/m であり、正方形格子のセルの一辺の長さは$\sqrt{N/m}$ である。

さらにセル内にあるＸ個の点を連結する近隣木の長さの上限値を推定する場合には、前提２で示された下限値の条

件設定とは逆に考えて、次のように計算すれば十分である。

$(0.66\sqrt{X})(\sqrt{N/m})$　　　（m＜２０のとき）

一方、セル内に含まれる点の個数は平均mのポアソン分布に従う。つまりセル内にＸ個の点が入る確率は、

$(m^X/X!)\,e^{-m}$

このことから、全セル内の近隣木の総延長の期待値は、

$$\sum_{X=0}^{X=N}(\sqrt{N/m})(0.66\sqrt{X})(m^X/X!)\,e^{-m} \qquad (1)$$

と考えてよい。ここで総和は、セルに含まれる個数Xに関して、Ｘ＝０からＮまで（Nはきわめて大きな値であるという想定のもとで）の和をとる。

実際に式（1）を計算していくためには、Ｎ、mは与えられた固定値と考えられるので、変数Xの関数としての挙動が問題となる。実際には、

$$\sum_{X=0}^{X=N}\sqrt{X}\,(m^X/X!)\,e^{-m} \qquad (2)$$

の項の計算が最大の課題である。この値は、実は、ポアソン分布する確率変数の平方根の期待値の算出式を意味している。この課題は一見易しそうに見えるが、解くのが難しい。本稿では、スターリングの近似式を大胆に利用して、この計算を次のように展開する。すなわち

$X! \to \sqrt{2\pi X}\,(e/X)^{-X}$　を用いて、

$$\sum_{X=0}^{X=N}\sqrt{X}\,(m^X/X!) \to \sum_{X=0}^{X=N}(\sqrt{X}/\sqrt{2\pi X})\,(em/X)^X \to \sqrt{m}\;\;e^m$$

この結果式（2）は

$$\sum_{X=0}^{X=N}\sqrt{X}\,(m^X/X!)\,e^{-m} \to \sqrt{m} \qquad (3)$$

結局

$$\sum_{X=0}^{X=N}(\sqrt{N/m})(0.66\sqrt{X})(m^X/X!)\,e^{-m} \to 0.66\sqrt{N} \qquad (4)$$

となることがわかる。ここは本稿における技術的な根幹部分ではあるが、数式の精緻な展開ではなく、直感的に判り易い結果を先取りして、その結果を数値計算と比較することによって、展開の飛躍が妥当なものであったことを後から確認しておくという説明法をとる。

さてこの計算の誤差に関しては、数値計算例で比較してみよう。まずスターリングの近似式の誤差は良く知られているように、＝４のとき、1.9%、X＝８のとき、1.0%、X＝10のとき0.8%、すなわち1000分の８程度の誤差である。この結果を用いて計算し、式（２）と式（３）の誤差を表―４にまとめた。つまりポアソン分布する変数の平方根の期待値と期待値の平方根の差である。実際には一辺１の正方形内に10000個の点を散布して、格子内の点の個数の平方根の平均値を出すというシミュレーションを行い、√ｍとを比較するための表である。

表―4　$\sqrt{m}$ の値と $\sqrt{X}$ の計算結果の比較（個数10000）

m	$\sqrt{m}$	$\sqrt{X}$ の平均値	相対誤差%
6	2.449	2.395	2.2%
8	2.828	2.779	1.7%
9	3.000	2.952	1.6%
10	3.162	3.126	1.2%
11	3.317	3.281	1.1%
16	4.000	3.973	0.7%
18	4.242	4.212	0.7%
20	4.472	4.441	0.7%

続いて各セル内に生じた近隣木を結合して全体を一本の大きな木に作り上げる作業を行う。そして各セル内の近隣木を隣り合わせに結合するための接続辺の長さの総和を求めるのである。まずセルの個数は、N/mであるから、木の本数も同数である。これらの木を接続するための接続辺の本数は（N/m－１）である。では接続辺１本の長さは、どの程度と考えるのが適当であろうか。この問題は、有向近隣木の辺の長さという問題に該当する。方向性を限定した近隣点までの距離という問題である。多数の点が一様にランダムに分布している状況下で、任意の点から見て東方向に探索した場合の最近隣点までの距離の期待値は、$(1/\sqrt{\rho})\sqrt{2}/2$ となる。ここにρは点密度である。この値は、また次のことを意味する。点が一様にランダムに分布しているとき、任意の点からの最近隣点までの距離の期待値は、よく知られているように　$(1/\sqrt{\rho})\,1/2$　である。

この値は、任意の点から360度全方位を探索し、最近隣点を見出した時の距離である。方向を限定した第一近隣辺の長さは、探索方向を限定したという制約が距離に及ぼす影響を考慮した値となっている。すなわち、ある点からみて右方向に限定すれば、探索範囲は、全方位の1/2となり、点に出会う可能性も 1/2 となるため、点の個数密度が 1/2 になったのと同様の影響が現われる。式 $(1/\sqrt{\rho})\,1/2$　において密度ρをρ/2に置き換えれば、式$(1/\sqrt{\rho})\sqrt{2}/2$　が

得られる。

われわれがこの式を必要としている理由は、各セルを橋渡しするための辺の長さを求めているからである。

各セル内の右端の点（X 座標の最大の点）から右方向に近隣点を探索し、結合する。さらに縦方向にセルを結合するために、ある縦列のセルに着目し、各セルの下端の点(Y 座標の最大の点)から下方向に近隣点を探し、結合する。この結合作業のために用いられる辺の本数は(セルの数―１)であり、１本の辺の長さは、方向の限定された最近隣辺であるから、$(1/\sqrt{\rho})\sqrt{2}/2$。つまり、総延長の期待値は、

$$(1/\sqrt{\rho})\sqrt{2}/2\ (N/m-1)$$

ここで点の密度ρは、１＊１の正方形内にＮ個の点を配置していることから、ρ＝Ｎを代入して、

$$\sqrt{2}/2\ (\sqrt{N}/m-1/\sqrt{N})$$

いまmの値は 10 から 20 を想定しているので、式（4）とあわせて考えると、近隣木の長さの期待値の上限値は、

$$0.66\sqrt{N}+\sqrt{2}/2\ (\sqrt{N}/m-1/\sqrt{N}) \qquad (5)$$

$$m=20\ のとき、\quad 0.695\sqrt{N}-1/\sqrt{2N} \qquad (6)$$

$$m=10\ のとき、\quad 0.681\sqrt{N}-1/\sqrt{2N} \qquad (7)$$

ただし、m=10 のときは、前提２でも説明したように平均頂点数が 10 なので第三近隣辺が使用されることはほとんどない。第一近隣辺と第二近隣辺によって近隣木が作られる。したがって第一近隣辺と第二近隣辺の長さの和は、$0.61\sqrt{N}$ という前提から導かれた数値である。

この結果、本章で作りだされたネットワークの長さの期待値の上限は、$0.695\sqrt{N}$ である。これまで係数（$\sqrt{2}/2$）の値が最短木の上限値として重要な役割を果たしてきたが、本稿の結果は、近隣木の長さの上限値を与えるとともに、自動的に最短木の長さの上限値の改善を行うものである。

第4章　　計算機実験の結果と考察

本章では再び、計算機実験の結果を報告し、これに基づいて考察を進める。

4-1　近隣木と最短木の関係

第３章の主題は近隣木の上限値をめぐる考察であったが、実用的観点からして、近隣木の長さの期待値はどの程度と推定されるか、推定式はどのようなものが適当であるのかを考えてみよう。さらにそこから近隣木の長さと最短木の長さはどの程度乖離しているかを考えてみたい。計算機実験の結果からいえば、頂点数が 1000 個から 2000 個の場合には、近隣木の長さも最短木の長さも互いに安定した数値に落ち着く。総延長の平均値を用いて長さの推定式は、

近隣木の場合：$0.666\sqrt{N}$

最短木の場合：$0.656\sqrt{N}$

とするのが実用的である。両者の差は、およそ６６０±５の範囲にあり、相対的には 1000 分の 10 以下である。実用的な視点だけから言えば、式（5）の上限値の推定式の表現もこれに合致するように、$0.66\sqrt{N}$ という主体部と $0.035\sqrt{N}$ という付帯部から構成されている点に留意してほしい。一方、近隣木の辺の構成比率は頂点数が多くなると非常に安定的であり、表－２または前提１を用いれば、2000 個の場合の長さの期待値は次のように求められる。第一近隣辺＝68.94％、第二近隣辺＝25.90％、第三近隣辺＝4.90％、第四近隣辺以降＝0.26％となっており、ほとんどの近隣木は第４近隣辺までで完成すると考えてよい。

(68.94％)（0.555）＋（25.90％）（0.889）＋（4.90％）（1.023）
　＋（0.26％）（1.216）＝0.666

4-2　個数と境界の影響

近隣木の長さに関して様々な角度から考察してきたが、頂点数と長さ、近隣辺の構成比率や辺の平均長といった部分と全体の間に整合性が見られる。また長さの下限値に関しては、この議論の延長上に展開しているため、数値の上でも安定的である。計算機実験はこうした結果を支持している。では近隣木の長さの期待値の上限値に関しては 3 章で求めた理論的な結果を計算機実験は支持するであろうか。

式（6）と計算機実験の結果を比べると、計算機実験の結果は式（6）よりも大きな値となってしまう。計算機実験では、頂点数が 10 個程度の小さな近隣木の集合と、それらをつなぐ連結辺の長さを算出して合計をとる。計算機実験の結果､近隣木の集合に対する推定式が $0.69\sqrt{N}$ であり、連結辺１本の長さが $0.872/\sqrt{\rho}$ となる。われわれが理論的に要求しているのは、それぞれ $0.66\sqrt{N}$ 、$0.707/\sqrt{\rho}$ という値であるが、実験値はいずれも大きな値を示している。この原因は何か。

実際には、多数の頂点が与えられたとき、これらを 10 個程度の小グループに分割して個別に小さな近隣木を作り、それらをつないで大きな一本の木を構成するという手続きで計算を行う。まず第一近隣辺と第二近隣辺の使用率に関しては我々の期待したとおりであり、第三近隣辺はほとんど使用されない。最大の問題は境界線が長さに与える影響である。実験結果は、頂点数が少ない場合、ネットワークの長さは不安定であり、平均値だけでは議論しにくい面がある一方、頂点数が 1000 個以上なら安定した値を示す。しかも頂点数が少ない場合には、ネットワークの長さが相対的に長くなる傾向を示す。このことから判断すると、境界線付近においては、近隣点の探索が 360 度全方位に行うことができないため、限定された領域での探索作業となり、中央部に比して境界付近では近隣までの距離が増大する。また、頂点数が少ないほど影響を得うける点の割合が高くなる。これが期待した理論値よりも長くなってしまうメカニズムであり、推定式における技術的な欠点である。

4-3　点の分布とその影響

ここでは、点の分布とネットワークの長さに関する課題に触れておく。これまでの議論は、一様にランダムな点分

布を基礎として展開してきたが、ここではより一様性の高い分布との比較を示す。すなわち、１＊１の正方形を10＊10の100個の正方形に分割し、各正方形内に１個の点をランダムに配置する。各正方形内には丁度1個の点が配分されるが、各点が正方形内に占める位置はランダムであるとする。これら100個の点を結ぶ近隣木や最短木の長さは、100 個の点を１＊１の正方形内にランダムに配置した場合と、平均してどれほどの差が出るか。最短木の場合で $0.802\sqrt{N}$ 、 近隣木では $0.808\sqrt{N}$ となりかなり長くなる。第一近隣辺の構成比率が 69%、第二近隣辺の構成比率が30%と若干高くなり、第二近隣辺までで近隣木が完成する可能性が40%程度となる。さらに条件を変えて、10*10の100個の正方形内にそれぞれ10個の点をランダムに配置した場合を調べると、総延長は最短木が $0.67\sqrt{N}$ 、近隣木が $0.68\sqrt{N}$ という結果となり、これに対応する 1000 個の点を１＊1の正方形内にランダムに配置した場合に近くなる。第一近隣辺が68.7%　第二近隣辺が25.5%、第三近隣辺が4.9%と構成比も同様に近似してくる。分布が異なれば、長さに影響がでるのは当然であるが、近隣木のネットワーク構成は大きな影響を受けない模様である。

第5章　　結語

本稿の技術的な目的は、近隣木の長さの期待値の上限値を求めることである。その過程において、計算機実験を用いて近隣木と最短木の長さの推定式を提案した。この式は頂点数が 1000 個以上の場合で点の分布が一様にランダムな場合には、安定した推定式といえよう。一方、点の個数や分布形が変化した場合の影響、近隣木の長さの推定に与える影響について考察し、どの程度長くなるかを示している。

本稿では平面的なネットワークの長さを、頂点数の平方根で推定する式を求めるという技術的な課題を考察し、そこから都市論一般に関する主題をめざそうとしている。特にネットワーク相互の関係を、辺の共有率や包含率を分析することによって、ネットワーク相互の近似度を計数的に示し、都市を図形の集合として、都市をネットワークの集合として研究する分野を開拓することをめざしている。本稿では、地域ごとに近隣性に基づくネットワークを構成し、それらを再度結合して全体像を導くという 2 段階構成法を考え、都市全域にわたるネットワークの長さの上限値の推定に利用している。

具体的には、地域ごとの近隣木を結合して全体の近隣木の長さの上限値を推定しようという企画である。この方法は、入れ子構造を階層的に使用している点に特徴があるのだが、点の数が少ないと境界の影響を受けやすいなどの技術的制限があるものの、地域間ネットワークにおける部分と全体の関係を図式的に、明快な事例として扱える方法であり、将来、現実の道路網の分析に応用できるものと期待される。また近隣木は、最短木と長さも近似しており、今後は近隣木が基準ネットワークの1つとなるかもしれない。

注(1)　ネットワークの長さの上限値に関する研究史は、参考文献8）に始まる。その後、参考文献5）によって、√Nの法則に該当する結果が導かれた。これはＢＨＨ定理と呼ばれ、ランダムに分布する点を結ぶ閉路の長さの推定式として半世紀にわたり影響力を保持している。その内容は、トラベリング・セールスマンの旅程長は、定数√ＮＳに比例し、比例定数は0.759と推定されるというものである。しかしながらここで用いられた、点を短冊状に分割し短冊内で紐状に連結したのち最後に紐の端を結ぶという方法は、短冊という領域形状の影響を受けること、定数の推定には実験値が用いられていること、ツリー構造の長さの推定を直接あつかったモノではない、といった点を反省的に理解しておく必要がある。ツリー構造の長さの上限値に関しては、参考文献6）が方法論においても結果の係数においても非常に優れている。既存論文のアイデアと結果の双方を整理して見ると、改定すべき目標値は、√２／２である。本稿では、境界条件の影響を可能な限り排除するために格子状分割を用い、さらにポアソン分布する変数の平方根の期待値に関する近似法を導出し、結果に関しても係数0.7未満という数値を導いた。

謝辞：本稿第三章式（3）に関しては、人見光太郎氏（京都工芸繊維大学）に有益な示唆をいただいた。特記して謝意を表す。

参考文献

1)　森口・宇田川・一松、(1956)、「数学公式Ⅰ」、p.233、岩波書店
2)　山本芳嗣、久保幹雄(1997)「巡回セールスマン問題への招待」朝倉書店、p.26、p.100
3)　譚学厚 平田富夫(2001)「計算幾何学入門」森北出版株式会社pp.81-89
4)　BOLLOBAS Bella,(1985)「Random Graphs」pp.123-151,　Academic Press
5)　Bearwood,Halton,Hammersley,(1959)「THE SHORTEST PATH THROUGH MANY POINTS」Proc.of Cambridge Philos.Soc.Vol.55,pp299-327
6)　Gilbert,E.N.(1965),「RANDOM MINIMAL TREES」,Journ..of Soc.Indust.Appl.Math.Vol.13,No.2,pp.376-387
7)　Gilbert,E.N.PollakH.O(1968)「Steiner Minimal Trees」SIAM J.Appl.Math,Vol.16,No.1,1968,pp.1-29
8)　Marks,E.S.(1948)「A Lower Bound for the Expected Travel Among m Random Points」Annals.Math.Stat.19,pp.419-422
9)　Shamos(1978)「COMPUTATIONAL GEOMETRY」p.193,Univ.of Microfilms International
10)　Verblunsky,S.(1951)「On the Shortest Path through a Number of Points」,Proc.Amer.Math.Soc.2,pp.904-913.
11)　笠原一人、古山正雄(1998)「最短木および階層を有する木の長さに関する考察」、日本建築学会計画系論文報告集第504号、pp.155-161.
12)　古山正雄(2003)「地域間ネットワークにおける最短結合と近隣結合に関する理論的考察」都市計画論文集No.38-3