

地域間ネットワークにおける最短結合と近隣結合に関する理論的考察

Theoretical study on the shortest connectivity and neighborhood connectivity for the regional networks

古山正雄
Masao Furuyama

The main theme of this paper is to show that almost 90% links of a minimum spanning tree are composed by the links of the shortest neighbor and the second shortest neighbor. More concretely, exactly 69% links of a minimum spanning tree are made up of the nearest neighbor links, about 22% links are made up of the second nearest neighbor and 9% links are made up of the third nearest and so on. From this information, if N point-facilities are located uniformly randomly in a 1×1 square, we can estimate the lower bound for the length of the minimum spanning tree on these N points far better than it has been. So that we can prove that the length of minimum spanning tree $> 0.64\sqrt{N}$ when N points are located randomly in 1×1 square.

Keywords: Regional-network, Shortest-Network, Neighborhood-Network, Lower-bound of min-tree
地域間ネットワーク、最短結合、近隣結合、最短木の長さの下限值

第1章 はじめに

本稿の主題は、都市内の n 地区を結合してネットワークを形成するとき、「総延長が最短となるネットワークと、近隣結合によってえられるネットワークはどのような関係にあるか」という問題を理論的に考察することである。一般に n 個の地区を結んで1つの全体像を形作るためのネットワークの種類は膨大な数に上るが、その中でも総延長が最小となるようなネットワークは、最短木と呼ばれる。最短木の構成方法はよく知られているだけでなく、総延長が最短であるという性質は、建設費用の最小化など、経済的意味が解釈しやすい。こうした理由から、最短木はこれまで地域間ネットワーク研究の基礎となるネットワークとしての役割を担ってきた。

一方、本稿では新たに、近隣木を提案する。近隣木とは、各地点から見て、第一近隣点、第二近隣点、・・・と辺を出して全体を結ぶネットワークである。具体的には、第一近隣辺の集合を考え、短い順に辺を選んで結合し、第一近隣辺を使い終われば、第二近隣辺を短い順に結合し、さらに第三近隣辺を短い順に・・・と閉路ができないように、全体をツリー状に結ぶネットワークである。

本稿の主題は、最短木と近隣木とを比較して両者の関係を考察することである。この両者を比較することの意味は二つある。その第一は、都市論的意味である。すなわち最短木を構成する辺は全体の長さを最短にするために選ばれた辺である。一方、近隣木の辺は各地点から見て近いものから順に選ばれており、全体が最短であるかどうかといった全体性には関心を示さない。近隣木は、近隣性という身近な論理を反映させたネットワークであり、

部分の論理の積み重ねで形成されたネットワークである。したがって最短木と近隣木の比較は、全体の論理と部分の論理の比較であるともいえよう。

第二に、両者の比較は技術的な意味をもつ。すなわち、最短木の長さに関しては、構成のアルゴリズムが知られているため、かえって理論的な解析があまり進んでいない。しかし両者を比較することによって、最短木の長さの下限値を従来よりもかなり改良できるのである。

ここで、本稿の結果を予告することによって、二つのネットワークの特性と都市計画的な意味をより具体的に描き出して見よう。 N 個の点が一辺1の正方形内にランダムに一様分布しているとき、

結果1 「すべての第一近隣辺は、最短木の辺である。」

結果2 「最短木の下限値は、 $0.64\sqrt{N}$ と推定できる。」

結果1は最短木の構成辺に関する情報である。各点から第一近隣点に出した辺は、すべて最短木の辺として採用され、最短木の辺の69%に相当することが理論的に証明される。このことは第一近隣点に関する限り、近隣性は全体の最短性に完全に寄与することができることを意味している。最短木の辺の残り31%に関する分析を理論的に遂行するのは難しいが、少なくとも計算機実験を併用すれば、31%のうち22%は第2近隣点への辺で構成されることが明らかとなる。最短木の辺のうち91%は、第一近隣辺と第二近隣辺で構成され近隣性がかなりの程度全体の効率化に寄与できることが示される。

結果2は最短木の長さの下限値の改良問題に関して、現時点での最良の結果を与えるものである。本稿では、既存の結果 $0.577\sqrt{N}$ (4) (5) (6) から始めて $0.61\sqrt{N}$ を経て

0.64√N へと改善していく。

ここで本稿の議論の前提となる既知の結果を整理する。以下の事項は本稿では証明なしに取り扱うものとする。

前提1：点の個数と最短木の長さの推定式^{4), 6)}

一辺1の正方形内にN個の点をランダムに分布させて最短木を形成し、その長さの平均をとると、

最短木の総延長 = 0.675√N

という関係が、計算機実験により得られている。

前提2：境界条件の取り扱い⁶⁾

本稿では、一辺1の正方形内にN個の点をランダムに分布させ、それらN個の点の上に最短木や近隣木を構築する。したがって本稿では、点の個数密度の値はNに等しい。理論的な解析ではNの値は境界条件を無視できるほど大きいものと想定している。計算機実験ではN=100を用いているが境界の影響は実用的に無視できる。

第2章 下限値の改善(その1)

我々はまず、数理生態学の分野で得られたE.C.ピールーによる結果を具体的に吟味して、そこから最短木の構成辺に関する有用な情報を取り出す作業から始める。

第1節 平面上に一様な密度で分布する点までの距離分布

この主題もすでによく知られたものであるが、以下の展開に有効であるので、改めて整理しておきたい。まず平面上に点が一様にランダムに分布しているとき、点の個数密度を ρ とすると、単位面積あたりの個数分布は、次のようなポアソン分布となる。mを単位面積あたりの平均個数とすると、面積あたりk個が存在する確率は、

$$\frac{m^k}{k!} e^{-m} \quad \text{式(1)}$$

個数がポアソン分布であることから、任意の点から見て第一近隣点までの距離 r_1 の分布は指数分布となる。なぜなら、距離 r_1 が第一近隣点までの距離である確率は半径 r_1 以内に点が無く、半径 r_1 の円周上に丁度1個だけ点がある確率に等しい。同じく第k近隣点までの距離 r_k の確率密度は、半径 r_k 以内に点が丁度(k-1)個あり、半径 r_k の円周上に丁度1個だけ点がある確率から得られる。したがって式(1)を用いると、第k近隣点までの距離 r_k はガンマ分布となり、その期待値は、式(2)であらわされる。

$$\int_0^\infty \frac{(2 - r_k^2)^{k-1} (2 - r_k^2)}{(k-1)!} e^{-r_k^2} dr_k \quad \text{式(2)}$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2k(k-1)! \sqrt{\pi}}$$

表-1 第k隣点までの距離 r_k の期待値 $\cdot \sqrt{\pi}$ の値

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------------|-----|------|-------|-------|-------|
| 期待値 $\cdot \sqrt{\pi}$ | 0.5 | 0.75 | 0.937 | 1.093 | 1.230 |

小さなkの値に対する期待値を表-1にまとめる。

第2節 第一近隣辺の重合度

次に、第1節の結果を利用して、最短木の下限值を推定する問題を考える。平面上に一様にランダムに分布する各点から、第一近隣点へ辺を出すとしよう。各点の出次数が1であるので、第一近隣辺の本数は、形式的には頂点数Nと同数だけ存在するが、実際には、辺の重合(カップリング)が生じるため、実現する辺の本数は頂点数の62%程度となる。この正確な値は、ピールーによって導出されたものである²⁾。2点A、Bが互いに相手の第一近隣点となり、辺が重合する確率は、まず、A、Bそれぞれを中心としてA、B間の距離Rを半径とする円を描く。このとき図-1の3つの領域の面積 S_1, S_2, S_3 は、

$$S_1 = \left(\frac{1}{3}\right) r^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2$$

$$S_2 = \left(\frac{2}{3}\right) r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2$$

となる。重合辺が生じる確率は、3つの領域に他の第3点が存在しない確率に等しい。従って、

$$\int_0^\infty 2 r e^{-(4/3 + \sqrt{3}/2)r^2} \rho dr = \frac{3.14}{5.053} = 0.6214$$

式(3)

となる¹⁾。

重合辺は2本を一本とみなすので、重合辺の本数は全体の31.07%である。逆に重合しない単辺は、

$$(100\% - 62.14\%) = 37.86\%$$

従って、第一近隣辺の本数は、重合辺を1本と見なすと頂点数の68.93%である。つまり約69%と判明した。最短木を形成するためには頂点数をNとすると(N-1)の辺が必要であるが、残り31%は第二近隣辺を用いなければならない。このことから、従来、最短木の最も単純な下限値は、任意の点からみて第一近隣点までの距離の期待値と、第二近隣点までの距離の期待値を用いて、前提2より $\rho = N$ に留意して、

$$\{0.5 \cdot 0.69 + 0.75 \cdot (1 - 0.69)\} N / \sqrt{\pi} = 0.5775 \sqrt{N} \quad \text{式(4)}$$

と推定されてきた⁶⁾。

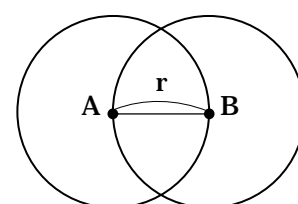


図-1 重合辺が発生する場合

だが計算機実験を繰り返した結果、第一近隣辺のうち、重合辺と単辺とではその長さの期待値が異なることが次第に判明してきたのである。この新たな情報を組み込むと、最短木の下限値は大幅に改善され、0.6 を超えることができるようになるのである。

第3節 下限値の改善

まず重合辺の長さの期待値を求めることから始めよう。重合辺の発生確率は、ピールーの式(3)で与えられているので、これに確率変数 r を乗じて積分すれば、

$$\int_0^{\infty} 2 r^2 e^{-(4/3 + \sqrt{3}/2)r^2 \rho} dr = \frac{0.2449}{\sqrt{\rho}}$$

式(5)

となる。すでに、第一近隣辺の長さの期待値が表-1で与えられている。さらに重合辺と単辺それぞれの発生確率がわかっているので、重合辺1本あたりの長さを p 、重合しない単辺1本あたりの長さを q とすると

$$0.6214 p + 0.3786 q = 0.5/\sqrt{N}$$

となる。ところで重合辺だけの長さの総和の期待値は

$$0.2449/\sqrt{\rho}$$

ゆえに $p = 0.394/\sqrt{N}$ 。そして

$$q = (0.5 - 0.2449)/(0.3786\sqrt{N}) = 0.6738/\sqrt{N}$$

したがって実現した第一近隣辺の総延長の推定値は

$$\{0.394(0.6214/2) + 0.6738 \cdot 0.3786\} \sqrt{N} = 0.37755 \sqrt{N}$$

すなわち、従来の考え方では式(4)に示したように、第一近隣辺の長さを、 $0.5/\sqrt{N}$ と推定して、これが実際に実現する確率、0.69 を乗じて、第一近隣辺の長さを、 $0.5 \cdot 0.69/\sqrt{N} = 0.345/\sqrt{N}$ と推定していたのだが、ここでは構成辺の内部に踏み込んだ新たな情報を用いて、 $0.37755/\sqrt{N}$ という推定値が得られた⁽¹⁾。ここから直ちに最短木の下限値は、第一近隣辺と第二近隣辺の長さを用いて、

$$\{0.37755 + 0.75(1 - 0.69)\} N/\sqrt{N} = 0.61 \sqrt{N}$$

式(6)

と改善できる。重合辺を1本の辺と見なせば、第一近隣辺の1本あたりの平均長は、 $0.37755/0.69 = 0.546$ となることから、0.5 よりも長いことがわかる。第一近隣辺を、重合辺と単辺に分けると、重合辺は互いに近いもの同士が結合された結果であるので、第一近隣辺全体の期待値0.5より短く、単辺は周辺に点が存在しない場合に生じることから平均値0.5より長くなる。その結果として、第一近隣辺の長さを、(重合辺の発生確率)・(重合辺の平均長) + (単辺の発生確率)・(単辺の平均長)で表すと、第一近隣辺全体の単純平均値0.5よりも長くなるのであ

る。第5章の計算機実験の結果はこのことを強く支持している。表-3参照。我々はこの考え方を第二近隣辺にも適用してさらに最短木の長さの下限値の改良を試みる。そのためにはまず、第一近隣辺は、すべて最短木の辺に採用されるという事実を確認しておかなければならない。

第3章 第一近隣辺の最短木への寄与率

我々はこれまで、無前提に第一近隣辺は最短木の辺になるものとして下限値の計算に用いてきた。だが、第一近隣辺の長さは、まさしく各点からみて最近隣点との距離にすぎないのであって、全体の総延長を短くするという最短木の全体性の論理とは直接的な関係がない。最短木の長さの下限値の推定を第一近隣辺の長さの総和から始めることの妥当性の論拠を、改めて与えておかなければならない。この結果は、最短木の長さを求めるための技術的な前提というだけでなく、都市構造の形成方法として重要な基礎的知見を与えるものである。

結果1「すべての第一近隣辺は、最短木の辺である。」

略証：すべての第一近隣辺は、最短木の辺となる。なぜなら、もし、第一近隣辺の中で最短木の辺に含まれないものがあつたとすれば、次のような矛盾が生じるからである。

いま、仮説として、第一近隣辺の中で最短木に含まれない辺があつたとしよう。その辺を X とし、辺 X の両端点を A 、 B とする。すなわち、頂点 A にとって頂点 B は最近隣点である。

仮説から最短木は辺 X を含まないのであるから、頂点 A に接続している最短木の辺は、頂点 A からみて第2近隣点以遠への辺である。したがってそれらの辺はすべて辺 X より長い。

つぎに辺 X と最短木の辺の和集合を考えると、辺の本数は頂点数に等しく全体は連結しているので、必ず閉路を含む。しかもこの閉路は、必ず辺 X を含んでいる。したがって、この閉路は頂点 A と頂点 B を通る。

この閉路上の頂点 A に接続する X 以外の辺を Y とする。閉路上の各頂点からは2本の辺がでており、しかも頂点 A からでていた2本の辺のうち1本は X であることを確認しておく。辺 Y に着目すると、辺 Y は第二近隣点以遠の点と結ばれているのだから、その長さは $|X| < |Y|$ 。長さが等しい可能性もあるが、その確率は0である。

いま、辺 Y を削除して辺 X を付加すれば、その結果得られるグラフは連結でありかつ全頂点を張る木である。しかも総延長は最短木の長さより短くなってしまふ。これは最短木の定義に反する故に矛盾。したがってすべての第一近隣辺は最短木に含まれる。

この結果から、最短木の辺の69%は第一近隣辺で構成されることが確認された。またこの結果から第一近隣辺だけで形成されるグラフは、重合辺を一本とみなせば、いわゆる森となり閉路を構成しないことが間接的に導かれることにも留意すべきだろう。次の課題は最短木を形成するための残り31%の辺のうち第二近隣辺はどの程度採用されるのか。その平均長はどの程度であるかを考察することになる。

第4章 下限値の改善(その2) 第二近隣辺の採択率と平均長について

本章の主題は、これまでに得られた結果を発展させて最短木の下限値を改善することである。すなわち、第2章で得られた最短木の下限値 $0.61/\sqrt{}$ を改善して $0.641/\sqrt{}$ まで改善できることを示したい。そのための方法は、まず第二近隣辺のうち、どの程度が最短木の構成辺になり得るのかを考える。つまり、第二近隣辺が生じる場合を観察すると、実は第二近隣辺と第一近隣辺が重合する場合や、第二近隣辺同士が重合する場合が生じる。このような場合には、第二近隣辺は顕在的に実現されない。しかもその割合は、おおざっぱに見積もっても38%以上であり、第二近隣辺が発生するのは、多くとも頂点数の62%以下にすぎない。さらに重要なのは、重合する第二近隣辺を除くと、実際に使用できる第二近隣辺の平均長は、第二近隣辺全体の平均長よりもかなり長くなる。こうした事実を利用して、第一近隣辺だけでは全体をつなぐためには不足していた残部の辺を第二近隣辺で充当する場合の計算を行い、最短木の下限値を上昇させるのである。我々はまず、使用可能な第二近隣辺がどの程度の割合であるのかを考察し、次に使用可能な第二近隣辺の平均長を算出する。

第1節 第二近隣辺の採択率

前章までの議論で最短木を形成する辺のうち、第一近隣辺はすべて含まれることが確認できたが、第二近隣辺はどの程度含まれるのであろうか。第二近隣辺のうち消去されるものの割合を考えてみよう。

図-2のように、辺ABが頂点Aにとっての第二近隣辺であったとしよう。辺ABが第二近隣辺である以上、領域 または に丁度1つだけ点Cが存在する。

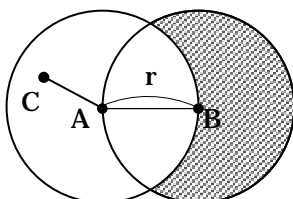


図-2 第二近隣辺が第一近隣辺と重合する場合

より具体的に言えば、点Cが領域内にあり、しかも領域内に点が存在しなければ、頂点Bからみて頂点Aは第一近隣点となるため、辺ABは頂点Bにとっての第一近隣辺であるので、すでに最短木の辺として採用済みである。したがって、頂点Aから頂点Bに出した第二近隣辺を最短木の辺として算入することはできない。

また、頂点Cが領域内にあり、領域内に頂点が存在しない場合にも、辺ABは、第二近隣辺同士の重合辺となり最短木には採用されない。

こうした事象が生じる確率は、頂点Aからみて頂点Bが第二近隣点でありかつ領域内には点が存在しない確率に等しい。

$$\int_0^{\infty} (2 - r)(r^2) e^{-(4/3 + \sqrt{3}/2)r^2 \rho} dr = 0.3862 \quad \text{式(7)}$$

これは第二近隣辺のうち、キャンセルされてしまう事例の一例に過ぎないが、少なくとも採用されるべき辺は、残りの61.38%の辺から選択することになる。では選択される可能性のある辺の集合において、辺の長さの平均値はどれほどであろうか？

第2節 第二近隣辺のうち採択される辺の平均長の下限值

いま、第二近隣辺の平均長を計算するために、式(7)の被積分関数にrを乗じて積分すると、

$$\int_0^{\infty} 2r^2 e^{-(4/3 + \sqrt{3}/2)r^2 \rho} dr = 0.2283 \quad \text{式(8)}$$

第二近隣点までの距離の期待値は表-1から全体として、 $0.75/\sqrt{}$ 。したがって、

$$0.3862 p + (1 - 0.3862) q = 0.75/\sqrt{}$$

いま $0.3862 p = 0.2283/\sqrt{}$ から

$$p = 0.591/\sqrt{}, \quad q = 0.85/\sqrt{}$$

結局、第二近隣辺としては、少なくとも $0.85/\sqrt{}$ の長さの辺を使用することになる。

第3節 最短木の下限値の改善 その2

ここまでの議論を整理すると、最短木を構成する辺のなかに、すべての第一近隣辺が含まれる。つまり最短木の辺の69%は第一近隣辺で構成され、その総延長も推定できる。残31%の辺が必要となるが、これらに対して、第二近隣辺はどのように構成辺に参加できるかを考えると、少なくとも第二近隣辺のうち38.6%は、第一近隣辺との重合によって、あるいはまた第二近隣辺同士の重合によって使用できない。残る61.4%の辺の平均長は $0.85/\sqrt{}$ 。我々はこの辺集合から辺を選び出すことになる。

ここで次の点を確認しておこう。それは第三近隣辺の方がより短い辺が存在するのではないかということである。平均値で議論する限りその心配はない。第三近隣辺の平均長は $0.9375/\sqrt{N}$ であり、第二近隣辺のうち、採用される可能性のある辺の平均長 $0.85/\sqrt{N}$ より長いからである。以上の考察から、下限値の改善を目的とした議論においては、安全側をとって、第三近隣辺は使用せずに第一近隣辺と第二近隣辺だけを用いた仮定のネットワークを考え、その長さを最短木の下限值とするのである。すなわち式(6)において、第二近隣辺に関する長さを0.75から0.85に換えれば、最短木の新たな下限値が得られる。すなわち、
 $\{0.37755 + 0.85(1 - 0.69)\} \sqrt{N} = 0.64 \sqrt{N}$ より、
 結果2「最短木の新たな下限値は、 $0.64 \sqrt{N}$ となる。」

今のところ、最短木の長さに対する関与の情報は、第二近隣辺に関しては不完全な状態にあるため、かなり安全側に議論を進めている。その原因は点の配置関係の分類とその発生確率を求める作業が、きわめて困難な状況にあるからなのだが、もう一步だけ踏み込んだ分析をおこなうことも可能である。

第二近隣辺が発生しない場合を図-3のイ、ロ、ハ、ニに示す。それぞれの場合の発生確率は式(7)と同様に計算できる。その結果、第二近隣辺は、本来なら頂点数と同じだけあるはずなのだが、重合や閉路が生じる場合などによって、明確に計算できる場合だけでも頂点数の74%が消去されてしまう。第二近隣辺は高々26%しか実現しない。したがって第一近隣辺の69%を加えても、95%にしかならないため、少なくとも残り5%の辺は第三近隣辺以遠の辺を導入しなければ、全体を一つに連結するネットワークは形成されないのである。さらに留意すべき点は、第二近隣辺のうち、すべてが最短木に採用されるのではなく、長い第二近隣辺は棄却して短い第三近隣辺を採用する可能性がある。第二近隣辺のうち、どの程度が最短木に採用されるのかを理論的に特定するの

が難しい。こうした事情を踏まえて、計算機実験の結果を考察していこう。

第5章 計算機実験による確認

本章の目的は、これまでに考察してきた数理的な結果を計算機実験によって確認すること、そして第二近隣辺が最短木の形成にどの程度寄与するのかを、4章の理論的結果よりも具体的かつ高い精度で提示することである。

計算機実験は、一辺1の正方形内に100個の点をランダムに配置し、最短木を構成する。99本ある最短木の辺を、第一近隣辺、第二近隣辺、第三近隣辺、・・・に分類する。さらに第一近隣辺、第二近隣辺、・・・の1本あたりの長さの平均を算出する。表-2はこの実験結果と理論的な推定値の比較表である。

100回の試行回数の平均をとれば、最短木の辺のうち第一近隣辺は69%、第二近隣辺は22%、第三近隣辺は6%、第四近隣辺以降の辺が3%という結果が得られる。したがって、第一近隣辺が最短木の69%の構成比を占めるという第3章の理論的結果が実験的に確認された。

一方、第二近隣辺の構成比に関しては、第4章では高々26%という結果であったのだが、計算機実験によって22%であることが確認された。

特に第2章では、第一近隣辺を重合辺と単辺に分け、それぞれの発生確率と平均長を求め、その積和によって重合辺を1本とみなした場合の第一近隣辺の長さを解析的に求めているが、表-3の計算結果はこの理論値を支持している。このことから、第一近隣辺と最短木の関係は内部構成に踏み込んで解明できたと考える。

表-2 最短木中の近隣辺：構成比率と一辺の長さ
(点100個、試行回数100回の平均値)

| | | 第一近隣辺 | 第二近隣辺 | 第三近隣辺 | 他 |
|-----|-----|-------|--------|---------|----|
| 構成比 | 理論値 | 69% | 26%以下 | 5%以上 | |
| | 実験値 | 69% | 22% | 6% | 3% |
| 長さ | 理論値 | 0.547 | 0.85以上 | 0.938以上 | |
| | 実験値 | 0.563 | 0.868 | 0.983 | |

表-3 第一近隣辺に関する情報
(実験回数100回の平均値、Nは点の数、は点密度)

| | 理論値 | 実験値 |
|-----------|------------------|------------------|
| 重合辺発生率 | 31.1% | 31.3% |
| 単辺発生率 | 37.9% | 37.3% |
| 重合辺の長さ | $0.394/\sqrt{N}$ | $0.407/\sqrt{N}$ |
| 単辺の長さ | $0.674/\sqrt{N}$ | $0.697/\sqrt{N}$ |
| 第一近隣辺の平均長 | $0.547/\sqrt{N}$ | $0.565/\sqrt{N}$ |
| 重合辺総延長 | $0.122\sqrt{N}$ | $0.127\sqrt{N}$ |
| 単辺総延長 | $0.255\sqrt{N}$ | $0.259\sqrt{N}$ |
| 第一近隣辺総延長 | $0.378\sqrt{N}$ | $0.387\sqrt{N}$ |

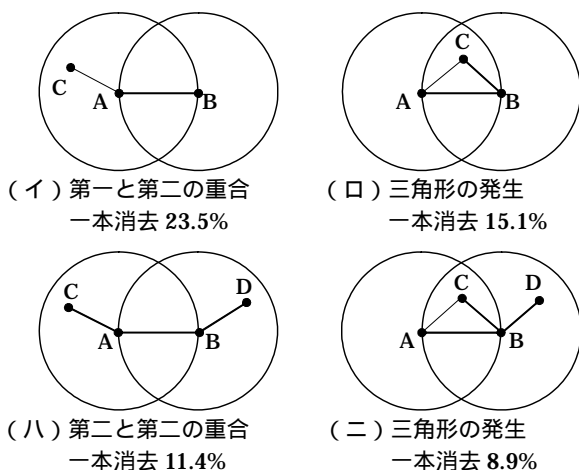


図-3 第二近隣辺が発生しない場合の事例

計算機実験から、現時点で推定できることをまとめると、最短木の辺を近隣性によって分類すれば、第一近隣辺が69%、第二近隣辺が22%、第三近隣辺が6%、第四以降の近隣辺が3%で構成されており、表-3に示した辺の長さの平均値との積和をとれば、

$$0.563 \cdot 0.69 + 0.868 \cdot 0.22 + 0.983 \cdot 0.06 + 1.06 \cdot 0.03 = 0.67$$

となり、最短木の長さの推定式の係数が得られる。理論的には、第一近隣辺の構成比は確定しているが第二近隣辺以降の構成比が確定していないため、最短木の下限值として、 $0.547 \cdot 0.69 + 0.85 \cdot 0.31 = 0.64$ が現時点での安全で妥当な解といえよう。

第6章 まとめと考察

本稿では、最短木と近隣木という二つのネットワークの比較を通じて、都市構造が部分の結合によって下から構築されていく場合と、全体の効率化を目指して上から構成する場合とが、相互に90%以上の確率で結合関係を共有していることを示すことができた。最短木は、全体を見渡して距離情報を整理し、短い辺から順に結合していくのに対して、近隣木は各点から周辺だけを見て身近な点へと辺を出して構成されるネットワークであり、部分の集積によって全体へといたる。

第一近隣辺は重合辺を1本と数えると頂点数の69%だけ発生するが、それらはすべて最短木の辺となることが理論的にも実験的にも示された。したがって、都市内のN個の地点を結んでひとつの全体を形成するとき、各地点から最近隣点に出した第一近隣辺による結合関係は、部分の論理と全体の効率化を同時に保障する。

また第二近隣辺のうち22%が最短木の辺となるため、第一近隣辺とあわせると最短木の91%の辺が第一、第二近隣辺で構成されることになる。このようにして局所的な最短化が全体の最短化にも大きく貢献することができるのである。

逆に言えば、都市内の各地区がランダムな位置取りをしている場合には、第一近隣辺と第二近隣辺だけでは、カップリングが生じて辺の本数が不足するため最短木が構成できないだけでなく、全体がひとつにつながらないのである。点の数が多くなれば、全体をひとつにつなげるには、第一近隣点、第二近隣点、さらに第三近隣点以遠の点と結ぶことが必要となる。一方、ランダムグラフ理論を用いた議論では、各点から2本の辺をランダムに、相手を選ばずに出したとき、確率1で全体がひとつにつながることがわかっている。距離を無視した結合においては次数2が連結の閾値になるのに対して、近隣性に基づく結合はこの点を保障しないゆえに、際立った対照を見せる。

最短木は、ともかく短い順に辺を選び出していく。しかしこのことは、第一近隣辺が終わってから第二近隣辺へ、第二近隣辺がすべて終わってから第三近隣辺を試行するという意味ではない。第二近隣辺の中には第一近隣辺よりも短いのも含まれており、また第三近隣辺よりも長い辺も含まれている。結果として、最短木と近隣木は、第一近隣辺はすべて共有するが、第二近隣辺については22%を共有するものの、すべてを共有するわけではなく、この点を境に互いに異なるネットワークへと分岐していく。本稿ではこの事実を利用して、最短木の下限値を安全側に見積もって推定したのだが、真の値を求めるためには第二近隣辺を捨てて、第三近隣辺のなかの短い辺を採用するメカニズムをより具体的に解明する必要がある。また、最短木の長さの上限値に関する情報は、現在のところ、 $\sqrt{2}/2 (=0.707)$ という値が鍵になっており、これより小さな係数を求めることが次の課題である。

補注(1)この議論はクラス全体の体重から、女子と男子の平均体重を出す問題に類似している。次の表の下線部を既知として他の項目を求める作業をおこなうと、この議論がよく理解できる。

| | 全体 | = | 女子 | + | 男子 |
|----|-----------|---|-----------|---|-------|
| 人数 | 100 | = | <u>60</u> | + | 40 |
| 総和 | 5000 | = | 2400 | + | 2600 |
| 平均 | <u>50</u> | | 40(p) | | 65(q) |

上の表から、女子の人数が1/2になったときの全体の平均体重を出すと、以下の表が得られる。構成比が変わると平均値も変わる。

| | 全体 | = | 女子 | + | 男子 |
|----|------|---|------|---|------|
| 人数 | 70 | = | 30 | + | 40 |
| 総和 | 3800 | = | 1200 | + | 2600 |
| 平均 | 54.3 | | 40 | | 65 |

参考文献

- 1) 森口・宇田川・一松、(1956)、「数学公式」, p.233, 岩波書店
- 2) E.C.ピーラー著、南雲仁一監訳、合田周平、藤村貞夫訳、(1974)、「数理生態学」, pp.129-130, 産業図書
- 3) BOLLOBAS Bella,(1985), 「Random Graphs」, pp.123-151, Academic Press
- 4) 古山正雄、(1985)、「都市における汎用的ネットワークとそのミニマムスパンニングツリーの長さの推定」, 日本都市計画学会学術論文集第20号, pp.97-102.
- 5) 古山正雄、(1988)「地域結合パターンとその評価指標に関する考察」, 日本建築学会計画系論文報告集第392号, pp.84-92.
- 6) 笠原一人、古山正雄、(1998)「最短木および階層を有する木の長さに関する考察」, 日本建築学会計画系論文報告集第504号, pp.155-161.
- 7) 古山正雄、(2002)「地域結合過程における $n \log n$ の意味について」, 平成14年度都市計画論文集, pp.133-138.