23. 地域結合過程におけるnlog$n$の意味について

Theoretical study on threshold-function nlog$n$ for the urban network connectivety

古山正雄
Masao Furuyama

The main theme of this paper is to clarify the moment when the network with distinction-members will be generated. Especially, we analyze the process such that the most important global structure in which every point is totally connected, is going to appear. In order to do this, we use the random graph theory that is the combination of the graph theory with mathematical probability theory. First of all, we have to show that **nlog$n$** is the threshold function for connecting every n members, so that nlog$n$ is the necessary number of edges as well as sufficient number for spanning n vertices. From here we can get the more precise probability for network connectivity. Finally we would like to discuss the conclusions of comparing this theoretical result with the computational result.

Keywords : Random-graph, Connectivity, Threshold-function, nlog$n$,Network-facilities
ランダムグラフ理論、結合度、閾値関数、nlog$n$、線的施設

１章　はじめに

本稿の主題は、都市内にあるｎ個の地区が結合されていく過程を分析し、「どのような結合パターンが、いつ頃発生するのか」という問題を理論的に考察することである。その中でもとくに基本となる大域的構造、すなわちｎ個の地区が１つの全体像を形作る時点に焦点を当てて詳細に考察する。この問題をグラフ理論の「辺」という用語を用いて言い換えると、２地点に１本の辺を対応させて勝手に各地点を結びつけていくとき、何本目位で全体が一つに結びつくだろうかということになる。いま与えらた条件は地点数がｎ個という事実だけであるから、結果はｎの関数で表現されるはずである。そしてその解が表題に示した　$n\log n$　という関数なのである[1),2)]。

本稿では、携帯電話やインターネットなどによる結合関係を考察対象としている。言い換えれば、位置や距離、平面性や立体形状といった空間条件や地理条件に拘束されない環境下でのネットワークを考察する。

これまでの都市解析における研究は、点の配置に基づく距離の測定、さらに距離抵抗を最小化するネットワークパターンの探索といった線的施設の建設を想定したネットワークの考察が主であった。しかし本稿では地理的拘束から解放された、きわめて自由度の高い結合モデルを用いて、人間関係や社会組織や情報網のような目に見えないネットワークの発生を考察する[9),10)]。

この結果を、既存の研究結果である距離に基づくネットワークと比較することによって、線的施設の建設を前提としたネットワークが、どの程度配置や距離の影響を受けているのかということを明らかにするための基礎資料を提供したいと考える[3),6),7)]。たとえば、本稿３章と４章で考察するように、ランダムグラフによる結合過程においてｎ個の点が一つの全体を形成するのに要する辺の本数は、距離に基づいて最短木を形成するのに要する辺の本数よりはかなり少ない。この事実は、距離条件が自由な結合をどの程度制約しているのかを明示するものであろう。また形成過程で生じるネットワークパターンの形状も両者の間で差異が認められる。

さて本稿では、ランダムグラフ理論を用いて考察を行う。これは確率論を用いたネットワーク論であり、特定の性質をもつネットワークが発生する確率を考察するための有効な方法である。戦後のグラフ理論の展開に多大な影響を与えたハンガリー数学界の重鎮ポール・エルディッシュが開拓した分野であり、本稿２章で示す結果２は彼の方法を具体的に翻案したものである[4),5)]。

彼が提起した関数　$n\log n$　は連結か非連結かを判別するための閾値関数＝スレッシュホールド・ファンクションである。本稿では、この関数がなぜ連結性を判別するための閾値関数となるのかを詳述することによって、結果３や結果４で提示する連結確率が容易に導出できることを示したい。

具体的な結果の考察に入る前に、グラフの形成に確率を導入する方法について簡単に紹介しておこう。はじめにｎ個の（名前のついた）頂点からなるすべてのグラフはいくつあるのだろうか？異なるｎ個の頂点から得られる２頂点対の数は　ｎＣ２　である。それらの頂点対が実際に辺で結ばれているかどうかによって個々のグラフが決定される。言い換えると、ｎ個の頂点をすべて結びあわ

正会員　京都工芸繊維大学工芸学部造形工学科（Kyoto Institute of Technology）

せるための辺の本数は nC2 であり、これらの辺が実際に引かれるか、引かれないかによってグラフの形がきまる。したがってn個の頂点を持つ全グラフの個数は、2^{nC2} である。
いま、$N=nC2=n(n-1)/2$ と置くと、ある特定の性質をもつグラフ、たとえば辺の数がK本からなるグラフはいくつあるだろうか。これは NCK となる。したがって、すべてのグラフの数と特定の性質を持つグラフの数との比をとることによって、その特定の性質を持つグラフが全体に占める割合を求めることができる。とくに頂点数nが無限大へと大きくなっていくとき、その比率が0に近づけば、その性質はほとんど観察されないが、逆にその比率が1に近づけば、確実にその性質が実現すると期待できる。これがグラフに確率を導入することの典型的な方法である。
別の観点に立てば、一本の辺が引かれる確率pを与えておき、あるパターンのグラフが発生する確率を計算する方法もある。特に、$p=\log n/n$ のときには、実現する辺の本数の期待値は

$$pn(n-1)/2=(n-1)\log n/2$$
$$=(1-1/n)n\log n/2 \rightarrow n\log n/2\ (n\rightarrow\infty)$$

となるので、辺の総数が$n\log n/2$の時の事象と互換可能となることが論証されている。さらに詳細な情報は参考文献5) p.35参照。

2章　連結過程の分析

この章では、ランダムグラフが一つの全体像に統合される過程を様々な角度から考察し、次第に精緻な数式表現へと進んでいく。はじめはラフな表現から始める。

2－1節　全体が連結される確率について

結果1:「頂点数nの完全グラフの各辺をランダムに選択していくとき、辺の数が$n\log n$番目に至ったときに、全体が一つに結ばれる確率のオーダーは少なくとも、$1-O(1/n)$ 程度である。」
証明：n個の頂点数から得られる2頂点対の数を、$nC2=N$とおく。いま$\lfloor X\rfloor$をXを越えない最大の整数を表す記号とし、$t=\lfloor n\log n\rfloor$ とおけば、頂点数がnで辺の数がtのグラフの総数は、NCtである。
これらすべてのグラフのうち、非連結なグラフの個数をもとめ、全体に占める割合が高々 $O(1/n)$ 程度であることを示せばよい。
さてn個の頂点のうち、あるk個と残り(n－k)個の頂点の間に全く辺が存在しない場合を考える。こうした孤立したk個の($n/2\geqq k\geqq 1$)頂点集合を含むグラフの数は、高々

$$(nCk)\,({}_{N-k(n-k)}C_t)$$

である。
したがってt本の辺をもつグラフが孤立したk個の頂点を含む確率は、高々、

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{N-k(n-k)}{t}}{\binom{N}{t}}<\frac{n^k}{k!}\left(\frac{N-t}{N}\right)^{k(n-k)}$$

$$=\frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{2n\log n}{n(n-1)}\right)^{k(n-k)}$$

ここでkを固定して$n\rightarrow\infty$とすると、$(n-k)\rightarrow\infty$、$n-1\rightarrow\infty$なので、$(1+a/n)^n\rightarrow e^a\ (n\rightarrow\infty)$を用いて上式は引き続き以下のように展開される。

$$=\frac{n^k}{k!}(e^{-2\log n})^k$$
$$=\frac{n^k}{k!}\left(\frac{1}{n^2}\right)^k$$
$$=\frac{n^{-k}}{k!}$$

この式は、辺の数が$n\log n$程度あれば、孤立した頂点集合が生じる可能性は、高々、$(1/n)$のオーダーであると主張している。
逆に連結となる確率は$1-O(1/n)$であり、nの値が大きくなれば、孤立した頂点集合は生じなくなる。□
この事実をより具体的に観察するために、孤立した頂点集合を分類し、さまざまな大きさの頂点集合の状態はどうなっていくのか、また各頂点がどのような経過を経て全体像に至るのかを詳細に調べてみる。

2－2節　連結に関する閾値関数

ここでは、各頂点が結合されていく過程でどのような形状の島を構成しながら全体像に至るのかを、できるだけ具体的に見ていく。すなわち一本の辺が引かれる確率が $p=(\log n+c)/n$ のとき、グラフはどのような状態にあるのかを調べる。ただしcは定数。
面倒な計算に入る前におよその見とおしを述べておく。1本の辺が引かれる確率が $p=(\log n+c)/n$ ならば、辺の本数の期待値は、$(n-1)(\log n+c)/2$ であり、結果1からn個の頂点はほぼ結ばれていると予想される。全体が連結していることを確認するためには、逆に孤立した部分が発生しないことを詳しく確認する必要がある。我々は①頂点数が2の場合、②頂点数が3からn/2の場合、③孤立する頂点、の3つの場合に分けて、孤立部分が発生しないこと、もし発生するならどの程度かを確認していく。このうち③の孤立点の発生確率が後の展開にも意味を持つことになる。

結果２：「頂点数がｎで任意の２地点が結ばれる確率ｐが、

$p=(\log n+c)/n$　ならば、次の３点が論証できる。

①孤立した辺、すなわち頂点数２の島が生じる確率は、ほとんど０である。

②頂点数が３の島、４の島、…頂点数が $n/2$ の島が生じる確率は、ほとんど０である。

③孤立点が存在する確率は０にはならない。」

証明：①、②、③の主張の意味を確認してから証明に入りたい。①と②は、頂点数が２以上で総数の半分以下の大きさの島はほとんど発生することがないという主張である。すなわち小規模な複数の頂点をもつ島はできないのである。逆にいえば大きな島ができて、ほとんどすべての頂点はこの巨大島に所属することになる。しかし、③の主張から少数の孤立点が残存する可能性がある。

すなわち、頂点をランダムに結合していくと、小さな島々は急速に大きな島へと吸収合併され、孤立点だけが残存し、最後の孤立点と巨大島が結合したちょうどそのとき、全体が一つに結合される。これがランダムグラフの結合過程である。適当な大きさの島が発生してそれらが次第に結合していくのではなく、いきなり一つの巨大島と少数の孤立点が発生し、それらが結ばれた時に全体が一つになるということである。こうした数学的風景を計算で確認していく。

①はじめに、(頂点数２の島＝孤立した辺) が存在する確率を計算する。それは高々次の値である。

ただし　$p=(\log n+c)/n$、

$$nC2\,p(1-p)^{2(n-2)}$$
$$\leqq (1/2)(n\log n)\exp\{-2\log n+5\log n/n\}$$
$$\leqq \log n/n$$

式の各項の意味を確認する。１本の辺が結ばれる確率はｐであり、この辺が孤立する確率つまり他のいずれの頂点とも結ばれない確率は　$(1-p)^{2(n-2)}$　である。いま異なる２頂点対の数は　$nC2$　であるから、これらすべての情報を掛けわせると求める確率が得られる。問題は式の展開技法である。とくに不等号の利用法に注意して運用していく。

$$\{n(n-1)/2\}\,p$$
$$=\{n(n-1)/2\}(\log n+c)/n$$
$$=\{(n-1)/2\}(\log n+c)$$
$$=(n\log n/2)\,\{1+c/\log n-1/n-c/n\log n\}$$

一方、

$$(1-p)^{2(n-2)}$$
$$=\{1-(\log n+c)/n\}^{2(n-2)}$$
$$=\{1-(\log n+c)/n\}^{n(2-4/n)}$$
$$=\exp\{-2(\log n+c)+4/n(\log n+c)\}$$
$$=\exp\{-2\log n+4(\log n)/n+4c/n-2c\}$$
$$\leqq \exp\{-2\log n+5\log n/n\}$$
$$=n^{5/n}/n^2$$

ここで以下の不等式を確認する。

$$\{1+c/\log n-1/n-c/n\log n\}\;n^{5/n}\leqq 2$$

不等式の左辺の値は、ｎが大きい時は、第２項は正値で０に近づき、第３項、第４項は負値で０に近づく。したがって、ｎが大きいときには左辺の値を２以下と見積もれば十分である。これらの結果をまとめると、

$$\{p\,n(n-1)/2\}\cdot(1-p)^{2(n-2)}\leqq \log n/n$$

つまりｎが大きいとき、この値は０となるので、頂点数２の島は発生しないことが判る。

島ができない理由は、辺の数が足りないからではない。多すぎて孤立しないためである。

②次に、頂点数ｒの島が生じる確率を求める。ただし、$3\leqq r\leqq n/2$　である。頂点数ｒの島は、必ずｒ個の頂点を張る木を含む。しかも島の外の頂点とは結ばれていない。頂点数ｒの木の辺の本数は $r-1$ であるから、一本の孤立した木が発生する確率は、

$$p^{r-1}\;(1-p)^{r(n-r)}$$

次に頂点数ｒの木の種類は r^{r-2}　種類あることが判っている。したがってｎ個の頂点から頂点数ｒの孤立した木が発生する確率は、高々、

$$nCr\;r^{r-2}p^{r-1}(1-p)^{r(n-r)}$$

程度であり、実際に頂点数ｒの島が発生する確率はこれより小さい。いま　$p=(\log n+c)/n$　で考えているので、この値を代入して整理する。整理の目的は、スターリングの公式を有効に使って、収束速度が明示できるように、項別に分けて確認しながら進んでいく。

$$nCr\;r^{r-2}p^{r-1}$$
$$=\{n!/r!(n-r)!\}\;r^{r-2}p^{r-1}$$
$$\leqq n^r p^{r-1} r^{r-2}/r!$$
$$=n^r p^{r-1} r^{r-2}/\{\sqrt{2\pi r}\,(r/e)^r\}$$
$$\leqq n^r p^{r-1} r^{-5/2} e^r$$

さらにつづけて、$n^r p^{r-1}$　部分の大きさを評価する。

$$n^r p^{r-1}=n\,(np)^{r-1}=n(\log n+c)^{r-1}$$
$$\leqq n\,\{\log n(1+c/\log n)\}^r$$
$$\leqq n(2\log n)^r$$
$$=n\exp\{r\log\log n+r\log 2\}$$

次には、$(1-p)^{r(n-r)}$　の項の大きさを評価しなければならない。

$$(1-p)^{r(n-r)}$$
$$=(1-p)^{n(r-r\cdot r/n)}$$
$$=\{1-(\log n+c)/n\}^{n(r-r\cdot r/n)}$$

$=\exp\{-(\log n+c)r+(r^2/n)(\log n+c)\}$

以上の結果をまとめてみると、

$$nCr\,r^{r-2}p^{r-1}(1-p)^{r(n-r)}$$
$$\leqq n\,r^{-5/2}\exp\{r+r\log\log n+r\log 2\}\cdot$$
$$\exp\{-(\log n+c)r+(r^2/n)(\log n+c)\}$$

我々の整理の最終的な目的地は、指数部 exp の中味が高々 （$-2r\log n/5$）であることを示すことである。

$$\exp\{r+r\log\log n+r\log 2-(\log n+c)r+(r^2/n)(\log n+c)\}$$
$$\leqq \exp r\log n\ \{(1+\log\log n+\log 2-c+cr/n)/\log n-1+r/n\}$$
$$\leqq \exp r\log n\ \{1/10-1+1/2\}$$
$$=\exp\{-2(r\log n)/5\}$$

この式の運用に際して用いた個別の検討結果を整理する。島の大きさｒについては　$3\leqq r\leqq n/2$　を想定しているので、

$-1+r/n\leqq -1+1/2$　である。一方、

$(1+\log\log n+\log 2-c+cr/n)/\log n$　の値は正の値をとりつつ、ｎが大きいとき０へと収束していく。したがって適当な値　1/10　と見なせば十分である。

総合すれば、

$$nCr\,r^{r-2}p^{r-1}(1-p)^{r(n-r)}$$
$$\leqq n\,r^{-5/2}\exp\{-2(r\log n)/5\}$$

頂点数ｒの島が存在する確率の評価である。

ｒの大きさは　$3\leqq r\leqq n/2$　の範囲にあるので、確率の和をｒ＝３からｒ＝ｎ／２までとる。

$$\Sigma\, n\,r^{-5/2}\exp\{-2r\log n/5\}$$
$$\leqq \Sigma\, n^{-1/5}r^{-5/2}$$
$$=n^{-1/5}\int_3^{n/2} r^{-5/2}\,dr$$
$$=n^{-1/5}\ (-2/3)\,r^{-3/2}$$
$$\leqq n^{-1/5}\,2/(3\cdot 3\sqrt{3})$$
$$\leqq n^{-1/5}$$

結局、頂点数がｎ/２以下の孤立した島ができる確率は

$$nC2\,p(1-p)^{2(n-2)}+\Sigma\, nCr\,r^{r-2}p^{r-1}(1-p)^{r(n-r)}$$
$$\leqq n^{-1/5}+\log n/n$$

であるから、ｎが大きくなるときは、０になってしまう。このようにして全体の半分以下の大きさの島はできないことが示された。辺の本数が多いために、孤立した存在が許されなくなり小さな島が発生しないのである。

③　最後に確認すべきは、孤立した点の存在である。ｎ個の頂点すべてが巨大な島に飲み込まれていったのであろうか？

孤立した点が存在する確率は、

$$n\ (1-p)^{n-1}$$
$$=n\ \{1-(\log n+c)/n)\}^{n(1-1/n)}$$
$$=n\exp\{-(\log n+c)\ (1-1/n)\}$$
$$=n\exp(-\log n)\exp\{-c+\log n/n+c/n\}$$
$$\to e^{-c}\qquad (n\to\infty)\qquad 式（1）$$

つまり定数ｃに依存し、０にはならないのである。□

結局ｎ個の頂点が連結されない原因は、孤立点が発生することに帰着される。この情報を活用して連結のためのスレッシュホールド関数を求めることができる。

２－３節　連結の確率について

以上の結果、孤立する辺や孤立する三角形などはいち早く巨大な島に吸収されて姿を消し、全体像が得られようとする最終局面では、巨大な島と少数の孤立点が残存し、最後に残った孤立点が巨大島に吸収されて一つになる。この情報が有効なのは、連結や非連結の確率を計算する場合に、孤立点の存在だけに着目してその他のことは考えなくて良くなるからである。孤立点だけを扱うのであれば、計算はきわめて容易となり、次の結果が得られる。

結果３：「$P=\log n/n$　は全体が結合されるためのスレッシュホールド関数である。すなわち、$p=(1+\varepsilon)\log n/n$　ならば、ｎ地点は一つの全体に結合されるが、$p=(1-\varepsilon)\log n/n$ ならば一つの全体に結合されることはない。

略解：ここでも、結合の可能性を阻むものは孤立点の存在であり、孤立点の個数の期待値を計算すると、

$$n\ (1-p)^{n-1}$$
$$=n\ (1-(1+\varepsilon)\log n/n)^{n-1}$$
$$=n\exp\{-(1+\varepsilon)\log n\}$$
$$=n\exp\{-\log n-\varepsilon\log n\}$$
$$=n(1/n)\ (1/n^{\varepsilon})$$
$$\to 0\qquad (n\to\infty)$$

となって孤立点は存在しないが、$p=(1-\varepsilon)\log n/n$ のときには孤立点の期待値は　$n^{\varepsilon}\to\infty$　$(n\to\infty)$　となり、孤立点が存在するので全体は一つに結合されない。

□

結果３を洗練させることによって次のような連結確率を求めることができる。

結果４：「$p=(\log n+2x)/n$の時、連結確率は $\exp(-e^{-2x})$ となる。」

略解：結果２が示しているように、全体への統合を拒むものは孤立した点の存在である。そこでまず孤立点の存在確率を計算してみる。ある点が孤立する確率とは、その点が他の（ｎ－１）個との間に辺を持たない確率であるから、簡単に計算することができる。

$$\{1-(\log n+2x)/n\}^{n-1}\qquad (n\to\infty)$$
$$\to\ \exp\{-\log n-2x\}$$

→（e^{-2x}／n）

全体が結合する確率とは、n個の点すべてが孤立点とならない確率と考えられるから、

$$\{1-(e^{-2x}/n)\}^{n} \rightarrow \exp(-e^{-2x})$$

□

3章 計算機実験による確認

本章では、これまでに考察してきた数理的結果を計算機実験によって確認する。２章の結果は、確率的な議論であることや頂点数nが極端に大きい場合の極限的な姿を閾値関数として表現しているため、実感として把握しにくい。また、実際問題として頂点数nを地域数と想定すると、人口１００万人都市におけるコミュニティの基準となる施設数、たとえば小学校や商店街の数などは、１００から２００程度である。こうした視点から頂点数nを１００とおいて計算機実験を試みるが、１００というのは極限値を議論にはあまりにも小さな値である。果たして結果が成立するものであろうか？

① まず結果２において示された、n個の地点が１つの全体に統合される時刻と孤立点が無くなる時刻が一致するという結果を計算機実験で確認する。

nを１００とおいて、任意の２点をランダムに取りだしてこの２点を結ぶ。この作業を繰り替えして全体が一つになる辺の本数を算出する。（はじめに１００あった島数が、辺を付加するにつれて減少し、最後に１つになるときの辺の数）

一方、辺を付加していくたびに孤立点の数を算出しておき、孤立点が０になるときの辺の数を算出する。

結果２はnの値が大きければ両者の本数は一致すると主張している。計算機実験では、nが１００程度の小さな値でも両者は一致することが確認された。１００回の試行をおこなったが９８回が一致し、２回が不一致という結果であり、きわめて高い確率で、

（全体が１つに統合される時刻）

＝（孤立点が０となる時刻）

＝（最小次数が初めて１になる時刻）

が確認できたのである。

② 次に結果３や結果４において示された連結確率に関する結果を計算機実験によって再確認してみたい。結果４と計算機実験の値をつきあわせる前に、次の事実を確認しておく。

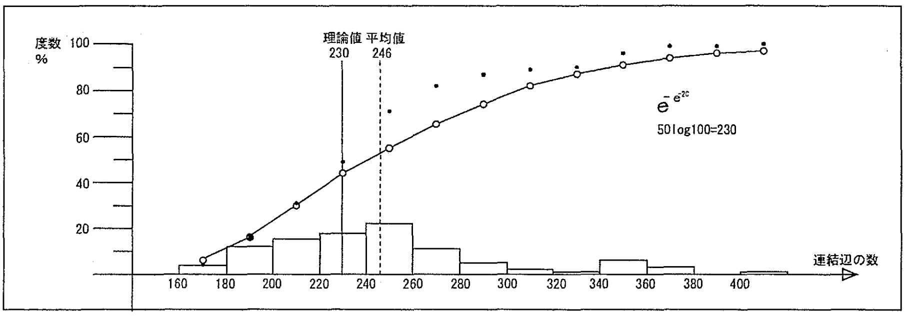
ランダムな結合過程によって、全体が一つに統一される確率は、当然辺の本数に依存する。n個の地点を結合しようとする時に、辺の本数が１ならば、連結確率は０である。（n－１）本ならば、全体が１つに統一される場合もあるが、一つにならない場合もある。全体の場合の数にしめる統一されない場合の数の割合はきわめて小さく、nの値が大きい時、０に等しい。

こうした議論をふまえて結果３の意味を再考してみる。まず２頂点の結合確率が $p=\log n/n$ であるということは、辺の総数の期待値は、

$$pn(n-1)/2=(n-1)\log n/2$$
$$\sim n\log n/2$$

となる。結果３は、これより少しでも辺の数が多ければ確率１で全体は一つに統一されるが、少しでも少なければ全体は一つに連結されないと主張している。計算機実験による結果は、地点の数が１００程度という少ない場合には、残念ながらそれほどシャープな閾値とは言えない。$n=100$ の時、$n\log n/2$ の値は、２３０であるが、図－１が示すように、全体を１つに統一する辺の本数は、２３０近辺でそれほど高い山を形成しているとは言えないからである。だが、試行回数１００回の平均をとれば、全体が一つに統一される辺の本数は２４６となり、理論値２３０に近い値となる。この結果を確率pについて考えると、$n=100$ のとき、$p=\log 100/100$ を、$n(1-p)$ に代入すると０．９８となり孤立点の期待値はほぼ１個となるため、連結のための辺の本数は２３０より多くなると予想される。

続いて結果４の確認に移る。結果４では、２地点間の結合確率が $p=(\log n+2x)/n$ のとき、すなわちこれを辺の数の期待値に直して、辺の本数が



図―１連結のための辺の本数（度数分布と累積度数）試行回数100．○は理論値

$(n-1)\log n/2+(n-1)x$

のとき、全体が一つに連結される確率は、

$\exp(-e^{-2x})$。

ｎ＝１００とｘ＝０、0.1、0.2、0.3、・・を代入することによって、辺の本数が、２２８、２３８、２４８、２５８、・・のときの連結確率を計算できる。図－１は、この理論値と実験値の累積度数を比較している。両者の乖離は、一般的に言えば無限と有限のズレによるものと想定されるが、一方、辺の数が２４６の地点をすぎて乖離が大きくなることから、２４６が連結の閾値としての役割を果たしているのではないかと解釈される。

４章　結果と考察

結果を整理し、その技術的意味と今後の展開を考察する。

①　幾何的モデルとの比較

従来、都市解析でネットワークを研究する場合、点の配置を与え、点相互の距離を算出し、距離抵抗を最小化するなど、距離に基づいたネットワーク形成を考察してきた。だが本稿では距離を使用しないネットワークを対象としているため、抽象的な印象を与えるかもしれない。ところが本稿の結果と幾何的ネットワークの結果を比較してみると、ランダム結合にもかかわらず、本稿のネットワーク形成は幾何的ネットワーク形成よりもかなり効率的であることが判明した。両者の違いは平面配置という空間条件がもたらしたものであり、これは重力の枷と同じく２次元の頸木であるといえよう。

ここで幾何的ネットワークの代表として最短木を取り上げて本稿の結果と比較してみる。すなわち１辺１の正方形内に１００個の点をランダムに配置しておき、すべての２点間距離を測定して短いものから順に結びつける。ただし閉路が生じるような辺は省く。こうして総延長が最短のネットワークである最短木が得られる。ではランダムに置かれた１００の点を結ぶ最短木の最終辺は、短い方から数えて何番目になるだろうか。最終辺は最後の孤立点が結ばれる辺と一致するのだろうか？

最終辺と最後の孤立点とが一致するのは、１００回の試行のうち４３回であった。本稿で考察したランダムグラフの９８回に比べるとかなりの差がある。また全体を連結するために必要な辺の本数に関しては、平均すると、最短木の最終辺は短い方から数えて３６９番目に相当し、ランダムグラフの場合の２４６より１００本以上多い。この結果から、距離を最小化しようとする空間的条件が連結速度を遅くしていると考えられる。

②　今後の展望

都市が全体像を獲得するためには、どのような結合条件が要請されるか。この基本問題に対する本稿の考察は、２地点間の結合確率が、$p=\log n/n$　のときに確率１で全体が連結されるというものであった。言い換えるとある点から見れば、相手の点は（ｎ－１）存在する。このうち、平均して $\log n$ 本以上の辺が出ていれば、全体は連結されることになる。

一方、連結と次数条件という観点からすれば、次の問題が想起される。「全体が一つに統合されるためには、各点から何本の辺を出す必要があるだろうか？」　この問に対する回答は、実に驚くべきものである。各点から１本の辺を出した時には、全体は一つに連結しない。しかし各点から２本づつ辺を出せば、全体は一つに連結する。このように次数を条件として全体の連結を考えると、本稿とは全く別の問題が生じるのである。

本稿では全体が一つに連結するという最も基本となる連結構造を考えたが、さらに、ｎ個の点を周回する閉路すなわちハミルトン閉路が生じるためには、どれほどの辺が必要とされるか、また、車輪グラフなどの部分構造が発生する確率は、辺の本数や点から出る次数とどのような関係にあるのかといった課題が残されている。こうしたランダムグラフに関わる課題は、人間関係や社会組織といった都市のコミュニケーションネットワークの形態分析であり、幾何的ネットワークの形態に根拠を与えるものと期待される。

参考文献

1）ERDOS Paul and SPENCER Joel,(1974),「Probabilistic Methods in Combinarorics」 Academic Press

2）BOLLOBAS Bella,(1979),「Graph Theory-An Introductory Course」、pp.143-144,Springer Verlag

3）古山正雄、(1985)、「都市における汎用的ネットワークとそのミニマムスパンニングツリーの長さの推定」、日本都市計画学会学術論文集第２０号、pp.97-102

4）BOLLOBAS Bella,(1985),「Graph Theory and Combinatorics －Proceedings of the CambridgeCombibatorial Conference in Honour of Paul Erdos」,pp.35-64,Academic Press

5）BOLLOBAS Bella,(1985),「Random Graphs」、pp.123-151., Academic Press

6）古山正雄、(1988)、「地域結合パターンとその評価指標に関する考察」、日本建築学会計画系論文報告集第 392 号、pp.84-92

7）古山正雄（1988)、「地域間ネットワークの評価指標 U の値について」、日本都市計画学会学術研究論文集第 23 号、pp.25-30

8）REINHARD Diestel,(1997),「Graph Theory」,pp.229-250, Springer(GTM173)

9）福山敬、小林潔司、(1997)「都市間の人的交流分析のためのランダム・マッティングモデルに関する研究」、平成９年度都市計画論文集、pp.139-144

10) 谷村仰仕、古山正雄、(2001)、「都市街路網パターンの再現率に関する一考察」、平成 13 年度都市計画論文集、pp.961-966